

הסתברות וסטטיסטיקה להנדסה

14/6/2011, מועד א' סימסטר ב' תשע"א

ריקי רות-גרין ושירי אלון עירון

הנחיות:

- משך הבחינה: 3 שעות.
- ניתן להשתמש במחשבון (למרות שלא נחוץ!).
- דף נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית מצורפים לבחינה.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כולן. הנקודות בבחינה מסתכמות ל- 120 (הציון המקסימלי שיינתן הוא 100).
- יש לענות על השאלות במחברת הבחינה ולא בטופס!
- בהצלחה!!

שאלה 1 (30 נקודות: 10 נקודות לכל סעיף)

יהא $Y = -\ln(X)$, $X \sim U(0,1)$.

א. חשבו את הפונקציה יוצרת המומנטים של Y (עבור $t < 1$) וזהו את התפלגותו.

יהא Z משתנה מקרי שמתפלג כמו Y , בלתי-תלוי ב- X . מטילים מטבע הוגן (הסתברויות 0.5:0.5 לעץ ופלי). אם יוצא עץ, מקבלים כפרס X מיליוני שקלים, ואם יוצא פלי, מקבלים כפרס Z מיליוני שקלים (הניחו שהטלת המטבע בלתי תלויה בהגרלת הפרסים).

ב. חשבו תוחלת ושוונת הפרס.

ג. חוזרים על ההגרלה 100 פעמים. מהו בקירוב הסיכוי שממוצע הזכיה במאה ההגרלות יעלה על 800,000 שקלים?

שאלה 2 (43 נקודות: 7 נקודות לסעיף א', 8 נקודות לסעיפים ב', ד', 10 נקודות לסעיפים

ג, ה')

לקוחות פוקדים את 'קפה שירי' לפי תהליך פואסון עם קצב של 10 לשעה.

א. בהנתן שבין השעות עשר לשתיים עשרה הגיעו לבית הקפה 30 לקוחות, מה ההסתברות ש- 10 מתוכם הגיעו במהלך חצי השעה הראשונה?

ב. מהי תוחלת הזמן עד הגעת הלקוח הראשון? ומהי תוחלת הזמן עד הגעת הלקוח החמישי?

- ליקפה ריקי מגיעים לקוחות לפי תהליך פואסון, בלתי תלוי בראשון, עם קצב של 20 בשעה. שני בתי הקפה נפתחים בעשר בבוקר.
- ג. יהא T הזמן עד הגעת לקוחות לשני בתי הקפה (עד שלכל אחד מהם נכנס לקוח אחד לפחות). מצאו את התפלגות T .
- ד. מהי ההסתברות שעד 10:10 נותרו שני בתי הקפה ריקים? מה ההסתברות שבין 10:10 ל-10:20 לא פקדו לקוחות אף אחד משני בתי הקפה? ובין 10:20 ו-10:30?
- ה. אופיר בודק את מידת הפופולריות של שני בתי הקפה. בכל פרק זמן של 10 דקות הוא רושם האם פקדו את שני בתי הקפה (ביחד) לקוחות. מה הסיכוי שבחלוף שעה ירשום אופיר שני פרקי זמן ריקים?

שאלה 3 (24 נקודות : 8 נקודות לכל סעיף)

בכיתה 40 תלמידים, והניחו 365 יום בשנה.

- א. מהי ההסתברות שבתאריך נתון יחגגו בכיתה יום הולדת?
- ב. מהי תוחלת מספר התאריכים (השונים!) בהם חוגגים יום הולדת בכיתה?
- ג. מהי תוחלת מספר ימי הלימודים עד שיחגגו בכיתה יום הולדת ראשון?

שאלה 4 (23 נקודות : 8 נקודות לסעיפים א', ב', 7 נקודות לסעיף ג')

המשתנה המקרי הדו-מימדי (X, Y) מתפלג לפי פונקציה הצפיפות :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ce^{-\lambda x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מצאו את הקבוע c , וחשבו צפיפויות שוליות של X ושל Y .
- ב. מצאו את הצפיפות המותנית של Y בהנתן $X=x$. מהו המשעריך האופטימלי של Y על סמך X ? חשבו אותו.
- ג. האם X, Y תלויים? (הוכיחו במדויק).