

הסתברות וסטטיסטיקה לפיזיקאים

07/07/2011 מועד א' סמסטר ב' תשע"א

ד"ר גלית אשכנזי-גולן

הנחיות:

- משך הבחינה: 3 שעות
- ניתן להשתמש במחשבון
- טבלת ההתפלגות הנורמלית מצורפת
- ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות (או ארבעה עמודים)
- בבחינה ארבע שאלות, עליכם לענות על כולן. הנקודות בבחינה מסתכמות ל- 110 (הציון המקסימלי שיינתן הוא 100)
- יש לענות על השאלות במחברת הבחינה ולא בטופס
- בהצלחה!

שאלה 1: (28 נקודות, 7 נקודות כל סעיף)

יהושפט משחק בדומינו. בחבילת הדומינו ישנן אבנים ובהם כל הזוגות האפשריים (הלא סדורים) של מספרים בין 0 ל- 7, כולל "דאבלים" (כלומר אבן אחת של שני אפסים, אחת של שני אחדות וכו')

- א. יהושפט בוחר אבן דומינו באקראי. מה הסיכוי שהסכום שעל פני האבן יהיה 5?
- ב. יהושפט בוחר 7 אבנים באקראי. מהי התפלגות מספר ה"דאבלים" שברשותו?
- ג. יהושפט בוחר 7 אבנים באקראי, ועושה זאת מההתחלה שוב ושוב עד אשר בתוך השביעיה הנבחרת תהיה האבן 7,7. (בכל פעם הוא מחזיר את האבנים שלקח לערמה ומתחיל מחדש). יוכבד אחותו מתעצבנת על המשחק התמוה, ולכן היא צובטת אותו שלוש צביטות בכל פעם שהוא בוחר 7 אבנים. מהי תוחלת ושונות מספר הצביטות שיקבל יהושפט?
- ד. יהושפט עכשיו מחלק את האבנים לזוגות. מה הסיכוי שיהיו בדיוק שני זוגות בהם אבן אחת היא בעלת סכום זוגי והשנייה בעלת סכום אי-זוגי (כל שאר הזוגות יהיו או של שתי אבנים בעלות סכום זוגי, או ל שתי אבנים בעלות סכום אי-זוגי).

שאלה 2: (27 נקודות, 8 נקודות לסעיפים א, ג, ד, 7 נקודות לסעיף ב')

מספר המכוניות הנכנסות לצומת "הכפר הכחול" בין השעות ארבע אחה"צ לשש אחה"צ הוא לפי תהליך פואסון בקצב של 10 מכוניות לשעה.

- א. אם ידוע שבין ארבע לשש נכנסו 18 מכוניות, מה התפלגות מספר המכוניות שנכנסו לצומת בין ארבע לחמש?
- ב. אם ידוע שבין ארבע לשש נכנסו 19 מכוניות, מצאו פונקציה יוצרת מומנטים של מספר המכוניות הנכנסות לצומת בין ארבע לחמש.
- ג. אם ידוע שבין ארבע לחמש נכנסו בדיוק 10 מכוניות, מהו הסיכוי שבין ארבע לשש יכנסו לצומת בדיוק 19 מכוניות?

ד. מהו, בקירוב, הסיכוי שבמשך 100 ימים ממוצע מספר המכונות הנכנסות לצומת בין השעה ארבע לשעה חמש יהיה מעל 10.3?

שאלה 3: (28 נקודות, 10 נקודות לסעיף א', 9 נקודות לכל סעיף מבין ב', ג')

- אסיר מנסה לברוח מהכלא. עומדות בפניו שלוש אפשרויות: לחפור מנהרה, לברוח דרך המרפאה או לקפוץ מעל הגדר.
- חפירת המנהרה לוקחת יומיים, ובכל יום שבו הוא חופר הוא מסתכן שיגלו זאת בסיכוי רבע.
 - בריחה דרך המרפאה לוקחת יום אחד בסיכוי חצי ויומיים בסיכוי חצי ובכל מקרה ההסתברות להתפס כשבורחים דרך המרפאה הוא 60%.
 - קפיצה מעל הגדר חייבת להתבצע תוך יום אחד. ביום ההוא ישנם חמישה שומרים המפוזרים על פני ארבעת חומות הכלא באקראי (כל שומר בוחר חומה באופן בלתי תלוי באחרים). האסיר ייתפס בהסתברות 1 אם על החומה שממנה הוא קופץ ישנם שני שומרים לפחות, ואחרת לא ייתפס.
- א. באיזו דרך כדאי לאסיר לברוח?
- ב. האסיר, שלא למד הסתברות ולכן לא יכול לחשב מה עדיף לו – מגריל באקראי דרך ומנסה לברוח דרכה. – מה הסיכוי שהוא בחר לברוח דרך החומה אם ידוע שהוא הצליח?
- ג. האסיר, (שכאמור למד הסתברות ולכן לא יכול לחשב מה עדיף לו...) – מגריל באקראי דרך ומנסה לברוח דרכה. – מה הסיכוי שהוא יברח תוך יום אחד בלבד ויצליח?

שאלה 4: (27 נקודות, 7 נקודות לסעיפים א', ג', ד', 6 נקודות לסעיף ב')

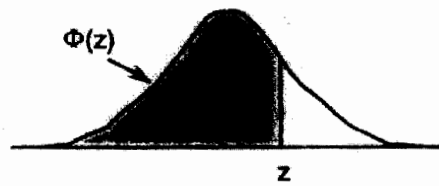
המשתנים המקריים X ו- Y מתפלגים התפלגות אחידה על פני הריבוע שקודקודיו: $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$

- א. מהי התוחלת והשונות של X ?
- ב. מהו מקדם המתאם $\rho(X,Y)$ האם X ו- Y בלתי תלויים?
- ג. מהו הסיכוי ש $X > 0.2$ אם ידוע ש $X+Y > 0$?
- ד. כעת מגרילים באקראי את X 10 פעמים. ישנו ערך a , ומוגדרים המשתנים המקריים הבאים:

ידוע כי I_1 , I_5 , I_7 ו- I_1 ערכם 1, וערכם של שאר המציינים (האינדיקטורים) הוא אפס. מצאו אנם לסיכוי של X להיות גדול מ- a , והסיקו אנם לערכו של a .

טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית

ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995