פתרון לבחינה מ 17.02.25

שאלה 1
התשובה היא ב'.
המאורע מתרחש אם"ם $(X < 1)$. לכן ההסתברות היא שליש בדיוק.
הערות
מכיון שהמשתנה הוא רציף אז $P(X < 1) = P(X \leq 1)$. יש שיוויון מוחלט ולא רק בקירוב.
הראנו דוגמאות שסכום של משתנים שמתפלגים אחיד לא מתפלג אחיד.
רבוע של משתנה שמתפלג אחיד רציף, בכל מקרה לא מתפלג אחיד.

שאלה 2
התשובה היא ד'.
צריך להתקיים $(X = 1, Y < 1)$ זה קורה בסיכוי $0.5(1 - e^{-1})$.
הערות
הסתברות הצירוף שווה למכפלת ההסתברויות הודות לאי תלות. שוב, התשובה הזאת היא מדויקת.
שיוויון בין המשתנים מתקבל בסיכוי אפס. למשתנה בדיד אין פונקצית צפיפות.

שאלה 3
התשובה היא ג' (תשיעית).
נגדיר משתנה $Y = X - 1$. Y הוא משתנה אי שלילי ותוחלתו היא אחת. מתקיים $(X \geq 10) \leftrightarrow (Y \geq 9)$ לפי אי שיוויון מרקוב מתקבל חסם של תשיעית. זהו חסם הדוק כי כל התנאים מתקיימים כאשר X מקבל את הערך עשר בסיכוי תשיעית ואת הערך אחד בסיכוי שמונה תשיעיות.
הערות
אי אפשר להשתמש באי שיוויון צ'בישב כי לא ידוע כלום על השונות.
צריך להראות שהחסם המתקבל הוא הדוק, וזאת על-ידי מתן דוגמא. זהו חלק מהפתרון.

שאלה 4
התשובה היא א'.
עבור כל $a < 0$, הסכום המצטבר של המשתנים בהכרח גדל לאט יותר מכל פונקציה לינארית. לכן בכל מקרה הממוצע שואף לאפס. (סכום הערכים המוחלטים של המשתנים גדל בקצב איטי יותר מלינארי). הממוצע של אברי סדרה ששואפת לאפס שואף לאפס.
הערות
המשתנים אינם שווי התפלגות, אין גם הנחה שהם ב"ת, לכן לא ניתן להוכיח בהסתמך על משפט כללי שלמדנו.
שונות סכום של משתנים שווה לסכום השונויות רק אם המשתנים בלתי מתואמים.

<u>שאלה 5</u>

התשובה היא ג' (שליש).

שיוויון בין המשתנים יכול להתקיים כאשר שניהם שווים לאיזשהו טבעי, לא דוקא לאחד.

ההסתברות היא

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0.5\cdot 0.5^{k-1}\cdot 0.5\cdot 0.5^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 0.25^{k} = \frac{0.25}{1-0.25}$$

<u>שאלה 6</u>

התשובה היא ד'.

נגדיר לכל מכתב אינדיקטור שהוא יגיע ליעדו. תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם שווה לתוחלת סכום האנדיקטורים ששווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים.

כל אחד מחמשת המכתבים שמיועדים לגלן הודל מגיע ליעדו בסיכוי חמש חלקי חמש עשרה.

כל אחד מעשרת המכתבים האחרים מגיע ליעדו בסיכוי אחד חלקי חמש עשרה. תוחלת הסכום היא

$$5\cdot\frac{5}{15}+10\cdot\frac{1}{15}$$

<u>הערות</u>

זה לא סביר שאותו מכתב נשלח ליותר מאדם אחד. אבל גם אם המכתבים הנשלחים היו נבחרים עם החזרה, היתה מתקבלת אותה תוחלת (תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות).

צריך להבחין בכך שהאינדיקטורים אינם שווי התפלגות. אין כאן סכום של אינדיקטורים שווי התפלגות. למכתב שמיועד להודל יש סיכוי גדול יותר להגיע ליעדו מאשר למכתב שנשלח למשהו אחר.

<u>שאלה 7</u>

התשובה היא ד'.

מדובר בתוחלת סכום של עשרה אינדיקטורים. לכל אחד מהאינדיקטורים יש הסתברות $e^{-ln(2)}=0.5$ שהיא ההסתברות שמשתנה יקבל את הערך אפס.

<u>הערות</u>

תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות ללא צורך בכל הנחה.

מכיון שאין כאן הנחת אי תלות בין המשתנים, אז לא ניתן לטעון שהתפלגות הסכום היא בינומית.

<u>שאלה 8</u>

התשובה היא ד'.

<u>פתרון בדרך ראשונה</u>

מדובר בשונות סכום של שני אינדיקטורים. האינדיקטור הראשון הוא לקבלת רצף בהטלות הראשונה והשניה. האינדיקטור השני הוא לקבלת רצף בהטלות השניה והשלישית.

השונות של כל אינדיקטור היא $0.5\cdot 0.5(1-0.5\cdot 0.5)$.

השונות המשותפת ביניהם היא $0,5^{3}-0.5^{2}\cdot 0.5^{2}$ (כדי שיהיו שני רצפים צריך שלוש הצלחות).

פתרון בדרך שניה

בהטלה הראשונה מתחיל רצף בסיכוי רבע. בהטלה השניה מחיל רצף בסיכוי רבע. לכן תוחלת מספר הרצפים היא 0.5 (תוחלת סכום האינדיקטורים לרצפים).

בסיכוי שמינית יש שני רצפים (שלוש פעמים עץ).

בסיכוי רבע יש רצף אחד (פעמיים עץ ואז פלי או פלי ואז פעמיים עץ).

אחרת אין בכלל רצפים.

לכן תוחלת רבוע הרצפים היא $0.25 \cdot 1^2 + 0.125 \cdot 2^2 = 0.75$.

שונות מספר הרצפים היא $0.75 - 0.5^2 = 0.5$ (תוחלת רבוע מספר הרצפים פחות רבוע תוחלת מספר הרצפים).

הערה

כמו בכל השאלות שפתרנו, רצפים הם תוצאות עוקבות.

שאלה 9

התשובה היא ב'.

עבור כל סכום של תוצאות של המטבעות, הקוביה משלימה לכפולה של שלוש בסיכוי שתי שישיות.

הערות

חוזר כאן הרעיון שאם יש סדרת מאורעות ב"ת שלאחד מהם יש הסתברות חצי, אז ההסתברות שיתרחשו מספר זוגי של מאורעות היא חצי.

צריך להבחין ברעיון זה, ואין הצדקה לבצע חישוב.

שאלה 10

התשובה היא ג'.

מספר האפסים שווה למינימום בין מספר גורמי החמש למספר גורמי השתיים. המשתנים הם זהים אם מספר גורמי החמש אינו גדול ממספר גורמי השתיים. אחרת גם אין להם את אותה התפלגות (כי אז יתכן שיש יותר גורמי חמש מאפסים ולא יתכן ההפך).

ב X יש לכל היותר 24 גורמי חמש (בכל מאה המספרים יש עשרים כפולות של חמש שמתוכן לארבע מספרים יש שני גורמי חמש). במדגם נבחרים לפחות ארבעים מספרים זוגיים (כי אין יותר מחמישים מספרים אי זוגיים). מתוך הזוגיים נבחרים לפחות חמישה עשר מספרים שהם כפולות של ארבע (כי אין יותר מעשרים וחמישה זוגיים שהם לא כפולות של ארבע). לכן יש לפחות חמישים וחמישה גורמי שתיים. לכן אם $t = 30$ יש בוודאות ב Y פחות גורמי חמש מאשר גורמי שתיים. אם $t = 45$ אז למרות שבמדגם חייבים להבחר גם כפולות של שמונה, יתכן שיהיו פחות גורמי שתיים מגורמי חמש.

שאלה 11

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{\binom{6}{3} \cdot 3!}{6^3}$$