

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד א', סמסטר א', תשס"ז,
מועד הבחינה: 19.2.07
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

_____ תעודת זהות:

_____ מספר מחברת:

לשימוש הבודקים:

_____ 1

_____ 2

_____ 3

_____ 4

_____ סה"כ

מספר הקורס: 0509.2805.01
מועד א', סמסטר א', תשס"ז,
מועד הבחינה: 19.2.07
משך הבחינה: 3 שעות

מבחן במבוא להסתברות וסטטיסטיקה (לתלמידי הנדסה מכנית)

דר. ענת סאקוב

הנחיות כלליות:

- הנכם יכולים להשתמש ב:
 - ארבעה דפי סיכום.
 - מחשבון.
 - טבלה של התפלגות נורמלית.
- בבחינה ארבע שאלות. עליכם לענות על כל הסעיפים במקום המצורף בטופס.
- מספר סעיפים הינם "שאלות אמריקאיות". עליכם להקיף תשובה אחת בלבד, באופן ברור.
- מספר הנקודות שינתן עבור תשובה מלאה הוא 6 נקודות. (הסכום המקסימאלי הוא 114, אך הציון המקסימאלי הוא 100).
- מצורפת מחברת בחינות שיכולה לשמש אתכם כטיוטה. המחברת תוחזר, אך לא תיבדק.
- למעט השאלות האמריקאיות, פתרון לא מנומק לא יזכה בנקודות.

בהצלחה !

שאלה 1

למבחן הוכנו 25 שאלונים מסוג A, 30 שאלונים מסוג B, ו-30 שאלונים מסוג C. השאלונים עורבבו וחולקו באקראי ל-30 הסטודנטים שהגיעו למבחן.

א. מה הסיכוי ששני הראשונים קבלו עותקים זהים?

$$\frac{25 \cdot 24 + 30 \cdot 29 + 30 \cdot 29}{85 \cdot 84} \quad \frac{p_c}{=} \quad \frac{\binom{25}{2} + \binom{30}{2} + \binom{30}{2}}{\binom{85}{2}}$$

ב. מהי תוחלת מספר הסטודנטים שקבלו עותק A?

כא שאזנט קדא שאאון מסוג A קס'כוי $\frac{25}{85}$
תוחלת מספר האנציקלופדיא שאלה אסכוס תוחלתם
שפ'א $30 \cdot \frac{25}{85}$

ג. יהיו X ו-Y משתנים מציינים למאורעות שהסטודנט הראשון והשני, בהתאמה, קבלו עותק A. מה ניתן לומר על משתנים אלו (הקפ/י תשובה אחת בלבד)?

כאשר אחז מקדם מסוג A
אז קטן הס'כני שגם אחר
יקדם מסוג A.

- I. בלתי תלויים ובלתי מתואמים.
- II. תלויים אבל בלתי מתואמים.
- III. תלויים עם מקדם מתאם חיובי.
- IV. תלויים עם מקדם מתאם שלילי.

ד. יהי A המאורע שהסטודנט הראשון קיבל עותק A, ו-B המאורע שהוא קיבל עותק B. מה ניתן לומר על המאורעות A ו-B?

אם יתכן ששני האירועים יתרחשו.
כא אחז מהם אפשרי אק
ח'יתכא דלת' אפשרי.

- I. זרים ובלתי תלויים.
- II. לא זרים ובלתי תלויים.
- III. זרים ותלויים.
- IV. לא זרים ותלויים.

ה. מה הסיכוי שבדיוק 9 סטודנטים קבלו עותק A, ובדיוק 10 קבלו עותק B?

$$\frac{\binom{25}{9} \binom{30}{10} \binom{30}{11}}{\binom{85}{30}}$$

שאלה 2

במתקן קליעה למטרה בלונה פארק יש 2 מטרות עגולות, שאליהן זורקים חיצים. מטרה אחת היא ברדיוס 20 ס"מ, ובמרכזה עיגול שחור שרדיוסו 10 ס"מ. מטרה שנייה היא ברדיוס 30 ס"מ, ובמרכזה עיגול שחור שרדיוסו 10 ס"מ. שחקן משלם למשחק 10 ש"ח, ואז בוחר מטרה. הסיכוי שיבחר במטרה הגדולה הוא 0.6. לאחר מכן, השחקן זורק חץ, והחץ פוגע בנקודה אקראית, על המטרה שבחר. אם יפגע בעיגול השחור שבמטרה הקטנה, יקבל חזרה 15 ש"ח, ואם יפגע בעיגול השחור שבמטרה הגדולה יקבל חזרה 30 ש"ח.

א. שחקן הצליח לפגוע במרכז השחור של המטרה שבחר. מה הסיכוי שבחר במטרה הגדולה?

ח'שוק הסתברות נאותה ע"י:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{0,6 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)^2}{0,6 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)^2 + 0,4 \cdot \left(\frac{10}{20}\right)^2}$$

ב. מהן תוחלת ושונות הרווח הנקי מזריקה של חץ אחד?

כ' X - הרווח

$$E(X) = -10 + 0,6 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)^2 \cdot 30 + 0,4 \cdot \left(\frac{10}{20}\right)^2 \cdot 15$$

$$P(X = -10) = 0,6 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{30}\right)^2\right) + 0,4 \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{20}\right)^2\right)$$

$$P(X = 20) = 0,6 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)^2 \quad P(X = 5) = 0,4 \cdot \left(\frac{10}{20}\right)^2$$

$$E(X^2) = P(X = -10) \cdot (-10)^2 + P(X = 20) \cdot 20^2 + P(X = 5) \cdot 5^2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

פירוק: שונות הרווח שונה לשונות הפסוק שבהן יקבל חזרה, הפסוק ע"כ היא שהצפה יקדח ע"כ מאנה את הפסוק.

ג. ביום מסוים משחקים במתקן 100 שחקנים (ב"ת אחד בשני). מה הסיכוי ש-17 מהם יזכו ברווח כלשהו? (אין צורך להגיע למספר אך יש להציב ולפשט).

אצל שחקן קבול 3317
 פס"כ"י ש"ר"ו"ד פטל

$$a = 0.6 \cdot \left(\frac{10}{30}\right)^2 + 0.4 \cdot \left(\frac{10}{20}\right)^2$$

פס"כ"י שגל"ק 17
 שחקנים יר"ו"ד פטל

$$\binom{100}{17} \cdot a^{17} \cdot (1-a)^{83}$$

ד. מה הסיכוי שממוצע הרווח הנקי של 100 השחקנים יהיה גדול מ-(-5) ש?

א"ב משט פגדום פארכ"י מאוצ פכ"ו"ד א"ל 100

שחקנים מתבלט קק"רוק נוכמ"ת עם תוחלת

$$E(x) \text{ וטוט } \frac{\text{Var}(x)}{100}$$

א"ב פס"כ"י פטל קק"רוק

$$1 - \Phi\left(\frac{-5 - E(x)}{\sqrt{\frac{\text{Var}(x)}{100}}}\right) = \dots$$

שאלה 3

סניף של משרד הפנים פתוח מ-8 בבוקר עד 1 בצהריים. מספר האנשים שמגיעים לסניף במהלך שעות אלו מתפלג לפי תהליך פואסון עם תוחלת של 300 אנשים.

א. מה הסיכוי שב-10 הדקות הראשונות יגיעו 12 אנשים?

$$P(10) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \frac{e^{-5.60} 5.60^{10}}{10!}$$

ג. מה הסיכוי שב-10 דקות הראשונות יגיעו 12 אנשים?

התיבולות מסבי המע"מ ג. 10 זקת פנל
 התיבולות הפסידיות פנל

ב. מהי תוחלת השעה ביום בה יגיע הלקוח הראשון?

זקק כן קמנוצ אקו אחר
 פנל עז הא'יוע הפלפון מתבלט
 התיבולות פנל זקק אחר 8

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ג. מהי תוחלת השעה ביום בה יגיע הלקוח השני?

סכום זמני פנל פנל אפני אקוואת פנל זעז
 תמלית 2 אכן תמלית פנל שכו יז'ע
 פאקווא פנל פנל 2 זקת אחר 8
 (התיבולות פנל עז פנל פאקווא פנל פנל)
 סכום א שני משתנים מערובים לאפני תמל"מ
 או משתנה זמנל

ד. במשרד הפנים חושבים שיש שינוי בתוחלת, ומחליטים לספור במשך 100 שעות, שנבחרות באקראי, את מספר האנשים שמגיעים לסניף. להלן מספר מאפיינים של המדגם (מעוגלים לצורך נוחות):

ממוצע	חציון	סטיית תקן	מקסימום	מינימום	n
70	57	63	314	0.5	100

הממוצע המדגמי היה 70. מהו האומדן והאומדן, לפי שיטת הנראות המקסימאלית, לתוחלת מספר האנשים ביום (זכרו שהסניף פתוח 5 שעות ביום)? נמק'ו.

היתפלגות מספר המגיעים לשעה בטלפון.
 אומדן נראות מכסימלי מספר המגיעים לשעה בטלפון
 הממוצע של מספר המגיעים לשעה (מכסימלי) של הממוצע
 הפונקציה $\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ שגם ע"י מכסימלי של
 $\left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right)$ אומדן נראות מכסימלי מספר המגיעים
 ה 5 שעות בטלפון 5 פעמים ממוצע המגיעים לשעה,
 כאן האומדן בטלפון: $5.70 = 350$

ה. בהמשך לסעיף הקודם, מצאו אומדן ואומדן, לפי שיטת הנראות המקסימאלית, לתוחלת השעה ביום בה יגיע הלקוח הראשון. נמק'ו.

אומדן נראות מכסימלי של $\frac{1}{\lambda}$ בטלפון
 כאן האומדן בטלפון $\frac{1}{70}$ שעה.
 $\frac{1}{\lambda}$

שאלה 4

משך הזמן (בשעות) שתלמיד חטיבת ביניים לומד, בבית, למבחן באלגברה מתפלג לפי הצפיפות:

$$f(y) = \begin{cases} cy(2-y) & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

א. מהו c ?

$$\int_0^2 cy(2-y) dy = 1$$

$$\int_0^2 cy(2-y) dy = c \int_0^2 (2y - y^2) dy = \left[y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

לכן

ב. מהי תוחלת משך זמן הלימוד ?

$$\int_0^2 \frac{3}{4} y(2-y) dy = \dots = 1$$

או דרך אחרת: הנעבדות סטטיסטית סדוק 1 לכן ל 2 יש תוחלת 1.

ג. האחוזון ה-25 של משך זמן הלימוד הוא: (הקפ/י תשובה אחת בלבד)

$$\int_0^b \frac{3}{4} (2-y) dy = \frac{1}{4}$$

I. בין 0 - 0.5 שעות.

II. בין 0.5 - 1 שעות.

III. בין 1 - 1.5 שעות.

IV. בין 1.5 - 2 שעות.

$$\left[\frac{3}{4} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^b = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} b^2 - \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdot 0.5^2 < \frac{1}{4} \implies b > 0.5$$

ד. בכיתה 30 תלמידים. בשיעור שלפני המבחן נערכה חזרה של 30 דקות. מהי תוחלת ושונות זמן החזרה הכולל (בכיתה ובבית) של 30 התלמידים, ביחד?

30 תלמידים צויים לשיעור זמן חזרה כולל של 15

שעות, שונות הזמן שהם צויים חזרה זכירה היא טאפ, קבית כל תלמיד צויה חזרה שתוחלתה 1.

ה'ז צויים זמן חזרה שתוחלתה 15+30*1=45
אזל תלמידים 30:

$$E(y^2) = \int \frac{3}{4} (2-y) y^2 dy = \dots = \frac{6}{5}$$

אם $Var(y) = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$. אזן שונות הסכום הבטלל שווה
? $30 \cdot \frac{1}{5} = 6$ כשונות של סכום משתנים לזתי תלמידים.

ה. מה הסיכוי שמבין 30 התלמידים, בדיוק 2 למדו, בבית, 15 דקות או פחות?

אזל תלמידים 30 קצרות ההסתברות היא:

$$P = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3}{4} (2-y) dy = \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3$$

המספר הבטלל של תלמידים שמתו פחות מ $\frac{1}{4}$ שעה מתפלג $B(30, P)$. ההסתברות שהטל יקרה את

הציק 2 בטל: $\binom{30}{2} P^2 (1-P)^{28}$