פתרון לבחינה מ 20/01/16

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ד	ב	ג	ב	א	ד	א	ד	א	ב	ד	ב	ד	ה	ג	ג

הסברים קצרים

שאלה 1

לשם כך חייב להתקיים ששני הראשונים הם אפסים ושהשלישי הוא 1.

ההסתברות היא $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$.

שאלה 2

מבצעים הטלה אחת ולאחריה בסיכוי $\frac{1}{3}$ ממתינים זמן בעל התפלגות $G\left(\frac{2}{3}\right)$ לתוצאה אחרת, ובסיכוי $\frac{2}{3}$ ממתינים זמן בעל התפלגות $G\left(\frac{1}{3}\right)$ לתוצאה האחרת.

למשתנה בעל התפלגות $G(p)$ יש תוחלת $\frac{1}{p}$.

לכן התוחלת היא $1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2/3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1/3}$.

דרך נוספת

זמן הציפיה לתוצאה ראשונה מתפלג $G\left(\frac{2}{3}\right)$ והוא בעל תוחלת 1.5 .

זמן הציפיה לתוצאה שניה מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$ והוא בעל תוחלת 3.

אבל ההטלה הראשונה היא משותפת לשני זמני ההמתנה.

שאלה 3

$S_{90}\sim Bin\left(90,\frac{1}{3}\right)$ ולכן $Var(S_{90})=90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$.

שאלה 4

עבור כל זוג תוצאות, ההסתברות שהן שונות היא $\frac{4}{9}$. זו התוחלת של כל אינדיקטור. תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות.

אינדיקטורים שכנים, הם כאן תלויים. בהתפלגות בינומית מדובר בסכום אינדיקטורים ב"ת.

נראה תלות:

$$P(Z_1=1, Z_2=1) = P(X_1=0, X_2=1, X_3=0) + P(X_1=1, X_2=0, X_3=1) =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} \neq \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9} = P(Z_1=1)P(Z_2=1)$$

נראה את התלות גם בדרך נוספת:

אם מתקיים $(Z_1=1)$, זה אומר שבשתי ההטלות הראשונות התקבלו שתי תוצאות שונות. במצב כזה, משיקולי סימטריה, ההטלה השניה היא הצלחה בסיכוי 0.5 . כך הסיכוי שתוצאות ההטלה השניה והשלישית הן שונות הוא $0.5\cdot\frac{1}{3} + 0.5\cdot\frac{2}{3} = 0.5$. סיכוי זה שונה מההסתברות הלא מותנה של האינדיקטור Z_2.

שאלה 5

אי שיוויון צ'בישב נותן רק חסם. הוא לא נותן הסתברות מקורבת.

כאן השונות של S_n היא $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}n$ וסטיית התקן היא $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}n}$. לכן סטייה ב $0.1\sqrt{n}$ מהווה סטייה של למשל פחות מסטיית תקן אחת. לכן יש לה הסתברות גבולית חיובית.

החסם המתקבל לפי אי שיוויון צ'בישב הוא $\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}n}{(0.1\sqrt{n})^2}$, שהוא גדול מהחסם הטריוויאלי 1.

החוק החלש אומר שההסתברות שהממוצע קרוב לתוחלת עד כדי ε בשלב מסוים נתון שואפת ל 1 כאשר $n\to\infty$. אבל, עבור ערכי n גדולים, סטייה ב $0.1\sqrt{n}$ בסכום היא סטייה ששואפת לאפס בממוצע. לכן כל שנוכל לקבל הוא שההסתברויות קטנות או שוות ל 1.

$$P\left(S_n > \frac{n}{3} + 0.1\sqrt{n}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{3} + \frac{0.1}{\sqrt{n}}\right)$$

וכמובן $\frac{0.1}{\sqrt{n}}$ שואף לאפס כאשר $n\to\infty$.

<u>שאלה 6</u>

אי שיוויון מרקוב תקף לכל משתנה מקרי שמקבל ערכים אי שליליים בלבד.

$$P\left(T_{90} \geq 60\right) \overset{Markov}{\leq} \frac{E\left(T_{90}\right)}{60} = \frac{90 \cdot \frac{4}{9}}{60}$$

ב' לא נכון, כי לא ניתן לקבל באמצעות אי שיוויון צ'בישב חסם בכיוון זה. אי שיוויון צ'בישב נותן רק חסם עליון על סטיה גדולה ממשהו.

א' לא נכון, כי השונות של S_{90} היא $90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$, ולכן לא ניתן לקבל חסם כל כך קטן.

ג' לא נכון, כי השונות של S_n שואפת לאין סוף (רק שונות הממוצע שואפת לאפס).

<u>שאלה 7</u>

המאורע $\left(T_{100} = 0\right)$ אומר שבכל 101 ההטלות הראשונות קבלנו את אותה תוצאה.

או שכל התוצאות הן 1 או שכל התוצאות הן 0.

ההסתברות המותנה שתוצאה זו היא 1 היא $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{101}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{101} + \left(\frac{1}{3}\right)^{101}}$.

<u>שאלה 8</u>

יהי e - התוחלת המבוקשת.

מתקיים $e = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3}\left(1+e\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left(2+e\right)$.

<u>הסבר</u>: או שכבר בהטלה השניה משלימים רצף, או שמבזבזים הטלה על-ידי קבלת תוצאה 0 וחוזרים למצב ההתחלתי, או שמבזבזים שתי הטלות על-ידי קבלת 1 ו 0 וחוזרים למצב ההתחלתי.

<u>שאלה 9</u>

$$E\left(XY\right) = E\left(X\left(3-X\right)\right) = E\left(3X\right) - E\left(X^2\right)$$

מתקיים:

$$E\left(3X\right) = 3E\left(X\right) = 3 \cdot 1.5 = 4.5$$

$$E\left(X^2\right) = \int_0^3 f_X\left(x\right) x^2 dx = \int_0^3 \frac{1}{3} x^2 dx$$

שאלה 10

$$P(\lfloor X\rfloor=0,\lfloor Y\rfloor=2)=P(\lfloor X\rfloor=1,\lfloor Y\rfloor=1)=P(\lfloor X\rfloor=2,\lfloor Y\rfloor=0)=\frac{1}{3}$$

לכן $E(\lfloor X\rfloor\cdot\lfloor Y\rfloor)=\frac{1}{3}\cdot 0\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 0$.

שאלה 11

מכיון ששני המשתנים הם ב"ת, אז תוחלת המכפלה שווה למכפלת התוחלות שלהם.
מתקיים $E(\lfloor X\rfloor)=E(\lfloor Z\rfloor)=1$.

שאלה 12

$$Cov(X^2,X)=E(X^2X)-E(X^2)E(X)=E(X^3)-E(X^2)E(X)$$

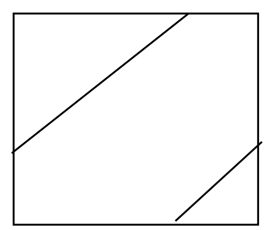
מתקיים:

$$E(X^3)=\int_0^3\frac{1}{3}x^3dx=\frac{1}{3\cdot 4}x^4\Big]_0^3=\frac{81}{12}$$

$$E(X^2)=\int_0^3\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{3\cdot 3}x^3\Big]_0^3=3$$

$$E(X)=1.5$$

שאלה 13



זוג המשתנים X ו Z מתפלג אחיד בתוך רבוע בעלי אורכי צלעות של 3.
ההסתברות המבוקשת היא חלקו היחסי מהרבוע של התחום שהוא משלים לשני המשולשים הימני התחתון והשמאלי העליון.

<u>הערה</u>

המאורעות $(X-Z<2)$ ו $(X-Z>-1)$ הם מאורעות תלויים ולכן הסתברות החיתוך שלהם אינה שווה למכפלת ההסתברויות שלהם.

<u>שאלה 14</u>

לפי החוק החלש, ההסתברות שהממוצע רחוק מהתוחלת $\frac{b}{2}$ ביותר מקבוע $\varepsilon > 0$ שואפת לאפס כאשר $n \to \infty$, לכן סדרת האומדים היא סדרה עקיבה.

התוחלת של כל אחד מהמשתנים היא $\frac{b}{2}$. לכן סדרת האומדים היא סדרת אומדים חסרי הטיה.

הפרמטר שמסביר הכי טוב את אוסף התוצאות הוא רק התוצאה המכסימלית מבין התוצאות המתקבלות (אם הוא פחות מהמכסימום, אז יש תוצאות שהן לא אפשריות, ומבין הפרמטרים האפשריים, ככל ש b קטן יותר, כן יש הסתברות גדולה יותר לקבל את התוצאות). לכן האומדים שבסדרה אינם אומדי נראות מכסימלית.

<u>שאלה 15</u>

למעשה אילה מכפילה את כל הטבעיים שבתחום חוץ מאחד מהם.
מספר האפסים שבהם מסתיימת מכפלת כל 100 הטבעיים שבין 1 ל 100 הוא 24:
אפס נוצר ע"י מכפלה של גורם 2 וגורם 5. יש בתחום 20 מספרים שמתחלקים ב 5, שמתוכם 4 מתחלקים פעמיים ב 5. יש הרבה יותר גורמי 2.

אם מוותרים על טבעי אחד אז בסיכוי בסיכוי $\frac{4}{100}$ מאבדים שני גורמי 5 ובסיכוי $\frac{16}{100}$ מאבדים גורם 5 אחד. מספר גורמי ה 2 נשאר בכל מקרה גדול יותר ולכן מספר האפסים ממשיך להיקבע ע"י מספר גורמי ה 5.

<u>שאלה 16</u>

בשני המקרים של דגימה בלי החזרה או עם החזרה, כל מספר שנדגם הוא בסיכוי $\frac{4}{100}$ בעל שני גורמי 5 ובסיכוי $\frac{16}{100}$ בעל גורם 5 יחיד, לכן תוחלת מספר גורמי ה 5 היא זהה בשני המקרים.

במקרה של דגימה ללא החזרה, זו גם תוחלת מספר האפסים (כי מספר גורמי ה 2 הוא בכל מקרה גדול יותר).
במקרה של דגימה עם החזרה, יש סיכוי קטן מאוד שמספר גורמי ה 2 יהיה קטן יותר.
כל נדגם הוא זוגי בסיכוי חצי. יש הסתברות נמוכה מאוד שידגמו למשל פחות מ 25 זוגיים, שלא לדבר על כך שיש זוגיים בעלי יותר מגורם 2 יחיד.
בשני המקרים של דגימה בלי החזרה או דגימה עם החזרה, תוחלות מספר גורמי ה 5 הן זהות ותוחלות מספר גורמי ה 2 הן זהות. אבל למינימום שלהם אין אותה תוחלת.

שלומי