

## פתרון לבחינה מ 20/05/16

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	ג	ה	ד	ד	ג	ג	ב	ב	א	ג	ג	ה	ב	ב	א

### הסברים קצרים

#### שאלה 1

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{0+2}{2} \cdot \frac{0+2}{2} = 1$$

( בגלל שהמשתנים הם ב"ת, אז הם בלתי מתואמים ותוחלת המכפלה שווה למכפלת התוחלות ).

#### שאלה 2

$$\begin{aligned} V(XY) &= E(XY)^2 - E^2(XY) = E(X^2Y^2) - E^2(X)E^2(Y) = \\ &= E^2(X^2) - 1 = (V(X) + E^2(X))^2 - 1 = \left(\frac{2^2}{12} + 1\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

#### שאלה 3

נשתמש בהסתברות שלמה. נעבור על הערכים האפשריים של  $X$  כאשר הצפיפות אנלוגית להסתברות לקבלת ערך. עבור כל ערך של  $X$ , צריך שהמשתנה  $Y$  יהיה קטן מ  $\frac{1}{x}$ . אם מתקיים ( $X < 0.5$ ) אז זה קורה בודאות.

$$\begin{aligned} P(XY < 1) &= p(X < 0.5) + \int_{0.5}^2 f_X(x) P\left(Y < \frac{1}{x}\right) dx = 0.25 + \int_{0.5}^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x} dx = \\ &= 0.25 + 0.25 \cdot \ln(x) \Big|_{0.5}^2 = 0.25 + 0.25 \cdot 2 \cdot \ln(2) \end{aligned}$$

#### שאלה 4

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \frac{4}{12} + 1$$

#### שאלה 5

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2) \\ E(X^4) &= \int_0^2 0.5x^4 dx = 0.1x^5 \Big|_0^2 = 3.2 \end{aligned}$$

### שאלה 6

אם  $E(X_1) \leq 1$  תוחלת כל מכפלה היא לא גדולה מ 1. במקרה זה נקבל שלמשל עבור  $a = 2$  מתקיים לפי אי שיויון מרקוב ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > 2) < 0.5$ . לכן תנאי ב' גורר ש  $E(X_1) > 1$ .

נראה באמצעות דוגמא נגדית שהאפשרויות האחרות לא מתקיימות. נניח שמתקיים  $P(X_1 = 0.2) = 0.51$ ,  $P(X_1 = 2) = 0.49$ . מתקיים  $E(X_1) = 0.51 \cdot 0.2 + 0.49 \cdot 2 > 1$ .

לפי החוק החלש עבור ערכי גדולים, עד אליהם בסיכוי ששואף ל 1 כאשר  $n \rightarrow \infty$  יתקבל הערך 0.2 יותר מאשר הערך 2. אם זה קורה, אז המכפלה קטנה מ 1.

### שאלה 7

$$P(X > 4) = P(X \geq 5) \stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{E(X)}{5} = \frac{3}{5}$$

### שאלה 8

כל ערך טבעי שבין 1 ל 9 מתקבל על-ידי בדיוק משתנה אחד. סכום הטבעיים שבין 1 ל 9 הוא 45.

### שאלה 9

הספרה 9 ממוקמת באחד מארבעת המקומות האחרונים בסיכוי  $\frac{4}{9}$ .

### שאלה 10

סכום הספרות שב 8 המקומות השמאליים שווה ל 45 פחות ערכו של המספר שממוקם במקום התשיעי. לכן שונות סכום 8 הראשונות שווה לשונות המספר שממוקם אחרון ( שונות של טרנספורמציה לינארית ). המספר שממוקם ימני ביותר מתפלג  $U[1,9]$  ושונות היא

$$\frac{(9-1+1)^2 - 1}{12}$$

### שאלה 11

עבור כל  $i$  מתקיים  $P(X_i = i) = \frac{1}{9}$ . לכן תוחלת מספר הספרות שעבורן מתקיים  $(X_i = i)$  היא 1. לכן תוחלת מספר הספרות שעבורן מתקיים  $(X_i > i)$  או  $(X_i < i)$  היא 8. משיקולי סימטריה, תוחלת מספר הספרות שעבורן מתקיים  $(X_i > i)$  היא  $\frac{8}{2} = 4$ .

### שאלה 12

$X_9$  לא יכול לקבל ערך גדול מ 9. לכן צריך להתקיים עבור כל  $1 \leq i \leq 8$  ש  $(X_i > i)$ . 8 חייב להיות ממוקם במקום 9, לכן 7 חייב להיות ממוקם במקום 8 וכך הלאה. יש רק סידור אחד אפשרי מבין 9! הסידורים.

### שאלה 13

כל אחד מהמשתנים מתפלג  $U[1,9]$ .  
 כל זוג הוא תלוי כי למשל  $P(X_i = 8, X_j = 8) = 0 \neq P(X_i = 8)P(X_j = 8)$ .

### שאלה 14

אם פונקציית ההסתברות המצטברת היא רציפה בכל נקודה. אז כל ערך שיתקבל על-ידי אחד המשתנים, יתקבל בהסתברות אפס על-ידי האחר, למרות שהאחר יכול לקבל את אותו ערך. נראה על-ידי דוגמה שאפשרויות ב' ו ד' אינן נכונות:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

פונקציית הסתברות מצטברת זו היא רציפה בכל נקודה חוץ מ 1. כל ערך שבין 0 ל 1 יכול להתקבל. אבל בסיכוי  $0.5 \cdot 0.5$  שני המשתנים יקבלו את הערך 1. נראה על-ידי דוגמה שאפשרות א' אינה נכונה:

$$\text{בניח שמתקיים } P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)} \text{ לכל } k \text{ טבעי.}$$

מתקיים  $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} k = \infty$ . אבל בהסתברות  $0.5 \cdot 0.5$  שני המשתנים יקבלו את הערך 1.

### שאלה 15

א' לא נכון כי למשל המשתנה  $X$  מקבל את הערך 3 בסיכוי גדול מ 0.01 ואז בכל מקרה שני המשתנים לא יהיו שווים.

$$\text{ב' לא נכון כי במצב של אי תלות למשל } P(X = 0, Y = 0) = e^{-1} \cdot \frac{1}{3} > 0.1$$

ד' לא נכון כי המשתנה  $X$  יכול לקבל אין סוף ערכים ואילו המשתנה  $Y$  יכול לקבל רק שלושה ערכים, ולכן לא יכול להיות קשר לינארי. נראה שניתן לבנות התפלגות משותפת שמתאימה ל ג'.

$$\text{מתקיים } P(X = 0) = P(X = 1) = e^{-1} > \frac{1}{3}$$

אפשרי שאם  $(Y = 2)$  אז בסיכוי שווה יתקיים  $(X = 0)$  או  $(X = 1)$ , אם  $(Y = 0)$  אז  $(X = 1)$  או  $(X > 2)$  ואם  $(Y = 1)$  אז  $(X = 0)$  או  $(X > 2)$ .

### שאלה 16

רק אם האומד אינו קטן מערכו של המכסימום, אז יש הסתברות שכל התצפיות יהיו בקטע. ככל שאורך הקטע קצר יותר גדל הסיכוי שכל התצפיות יהיו בקטע. לכן אלה אומדי נראות מכסימלית.

עבור כל  $\varepsilon > 0$  ההסתברות שכל  $n$  התצפיות יהיו קטנות מ  $b - \varepsilon$  שואפת לאפס כאשר  $n$  שואף לאין סוף. לכן המכסימום שואף ל  $b$  וזו סדרת אומדים עקיבה.

המכסימום לא יכול לקבל ערכים גדולים מ  $b$ , אבל הוא כן מקבל ערכים קטנים מ  $b$ . לכן תוחלת המכסימום אינה שווה ל  $b$ . לכן אלה אינם אומדים חסרי הטיה.

---

שלומי