

פתרון לבחינה מ 01.02.17

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	ג	ד	ד	א	ג	ב	ד	ה	א	ב	ה	ד	ג	ב	ב

הסברים קצרים

שאלה 1

בשתי הטלות ב"ת של קוביה תקינה יש 36 אפשרויות שוות הסתברות. הסכום הוא לפחות 11, אם"ם מתקבל אחד משלושת הצירופים (6,6), (6,5), (5,6).

שאלה 2

תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות. התוחלת של תוצאת קוביה היא 3.5.

שאלה 3

$$P(X_1 = 6) \cdot \frac{5}{6} + P(X_1 = 5) \cdot \frac{4}{6} + P(X_1 = 4) \cdot \frac{3}{6} + P(X_1 = 3) \cdot \frac{2}{6} + P(X_1 = 2) \cdot \frac{1}{6}$$

דרך נוספת

$$P(X_1 > X_2) = \frac{1 - P(X_1 = X_2)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{6}}{2}$$

שאלה 4

לפי תוחלת שלמה נקבל $0.5 \cdot \frac{1+6}{2} + 0.5 \cdot \frac{0+1}{2}$.

שאלה 5

כדי שיתקיים $(X_2 > X_1)$ חייב להבחר בשלב הראשון המטבע. בשלב השני, אם הקוביה מראה לפחות 2, אז המאורע יתרחש, ואם הקוביה מראה 1, אז המטבע צריך להראות 0.

$$\text{מתקבל חישוב } 0.5 \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

דרך נוספת

יש שיוויון בין שני המשתנים רק אם שניהם מקבלים את הערך 1 שהוא הערך היחיד שגם המטבע וגם הקוביה יכולים לקבל. קוביה ומטבע ב"ת מקבלים שניהם את הערך 1 בסיכוי

אם אין שיוויון אז כל אחד מהמשתנים גדול מהאחר באותו סיכוי. לכן הסיכוי

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

הוא $\frac{1 - \frac{1}{12}}{2} = \frac{11}{24}$.

שאלה 6

בסיכוי חצי הממוצע המצטבר של הסדרה $\{X_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ ישאף בהסתברות לתוחלת של מטבע ובסיכוי חצי ישאף בהסתברות לתוחלת של קוביה. מכיון ששתי תוחלות אלה הן שונות, אז אין שאיפה בהסתברות לגודל נתון מראש. הממוצע המצטבר של הסדרה $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ ישאף בהסתברות בכל מקרה לממוצע של מטבע וקוביה שהוא הממוצע של ההטלות האי זוגיות וההטלות הזוגיות.

שאלה 7

$$\text{Var}(2X + 5) = 2^2 \text{Var}(X) = 4 \cdot 6 \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

שאלה 8

נראה שעבור כל זוג צמתים, ההסתברות שאין ביניהם מסלול היא אפס. נראה זאת על-ידי זה שנראה שלמעשה אפילו הסתברות המאורע שאין ביניהם מסלול באורך 2, היא אפס. מכיון שיש מספר בן מניה של זוגות של צמתים ומכיון שלאיחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס, יש הסתברות אפס, אז ההסתברות שיש זוג צמתים שביניהם אין מסלול באורך 2 היא אפס.

עבור זוג צמתים נתון i, j קיים ביניהם מסלול באורך 2 דרך צומת שלישי נתון k בסיכוי 0.25, ולא קיים ביניהם מסלול באורך 2 דרך אותו צומת בסיכוי 0.75. ההסתברות שבין זוג צמתים נתון i, j לא קיים מסלול באורך 2, קטנה מ 0.75^n לכל n טבעי ולכן שווה לאפס. לאיחוד בן מניה של מאורעות זרים יש הסתברות ששווה לסכום ההסתברויות של המאורעות. טענה זו נכונה גם עבור איחוד בן מניה של מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ כלשהם (אפשר לעבור לסדרת

מאורעות זרים שיש לה את אותה איחוד: $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימת $B_1 = A_1$ ולכל $i \geq 2$:

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j < i} B_j$$

הערה

המאורע שיש זוג צמתים שאין ביניהם מסלול, הוא לא מאורע ריק, אבל ההסתברות שלו היא אפס. זה דומה לכך שההסתברות שמשתנה רציף יקבל ערך מסוים היא אפס, למרות שהמאורע הזה אינו קבוצה ריקה.

שאלה 9

המשתנה Y הוא זוגי בסיכוי חצי (כסכום של הטלות מטבע ב"ת הוגנות, בהטלות ב"ת של מטבעות די בכך שלפחות אחד מהמטבעות הוגן, כדי שהסכום יהיה זוגי בסיכוי חצי). עבור כל ערך של המשתנה X , המשתנה Y משלים לסכום זוגי בסיכוי חצי. אם X קיבל ערך זוגי, אז Y צריך לקבל ערך זוגי ואם X קיבל ערך אי זוגי, אז Y צריך לקבל ערך אי זוגי. בכל אחד מהמקרים הדרישה מתקיימת בסיכוי חצי.

שאלה 10

נראה שהתוחלת היא $\frac{5}{6}$.

אם תוצאת ההטלה הראשונה היא 6, אז זו ההטלה האחרונה.
אם תוצאת ההטלה הראשונה היא שונה מ-6, אז לאחר הטלה זו מספר ההטלות מתפלג

$G\left(\frac{1}{6}\right)$ שהוא בעל תוחלת 6. ההטלה האחרונה בהכרח שונה מההטלה הראשונה.

לכן תוחלת מספר ההטלות האחרות היא 5. כל אחת מהן מקבלת את כל אחד מהערכים שבין 1 ל-5 בסיכוי שווה. לכן היא שווה לתוצאה הראשונה בסיכוי $\frac{1}{6}$.

שאלה 11

התוצאה 6 בהכרח מתקבלת פעם אחת. התוחלת של מספר ההטלות הכולל היא 6.
לכן תוחלת מספר ההטלות שבהן התקבלה תוצאה שונה מ-6 הוא 5. לכן גם כל אחת מהתוצאות 2 ו-4 יתקבלו בממוצע פעם אחת.

שאלה 12

בהסתברות 1 מספר המשתנים מבין X ו- Y שקטן מ-0.5 הוא 1.
בהסתברות 1 מספר המשתנים מבין Z ו- W שקטן מ-0.5 הוא 1.
לכן מספר הצלעות שמרחקן קטן מ-0.5 הוא משתנה מנוון שמקבל בהסתברות 1 את הערך 2. למשתנה מנוון יש שונות של אפס.

שאלה 13

כל אחד מהמשתנים מתפלג אחיד בין 0 ל-1, ולכן תוחלתו היא 0.5. תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות.

שאלה 14

נראה שהמינימום מתפלג אחיד בין 0 ל-0.5. מזה ינבע שתוחלתו היא 0.25.
יהי T המינימום.

עבור $0 \leq t \leq 0.5$: $F_T(t) = P(0 \leq X \leq t) + P(1-t \leq X \leq 1) = 2t$

שאלה 15

יהי R המינימום. נמצא את פונקציית ההסתברות המצטברת של R .
עבור $0 \leq r \leq 0.5$:

$$F_R(r) = 1 - P(X \geq r, Y \geq r, Z \geq r) = 1 - P(r \leq X \leq 1-r, Z \geq r) =$$

$$= 1 - P(r \leq X \leq 1-r) \cdot P(Z \geq r) = 1 - [1 - 2r][1 - r] = 3r - 2r^2$$

לכן פונקציית הצפיפות של R מקיימת עבור $0 \leq r \leq 0.5$: $f_R(r) = 3 - 4r$

$$E(R) = \int_0^{0.5} f_R(r) r dr = \int_0^{0.5} (3r - 4r^2) dr = \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{4}{3} r^3 \right]_0^{0.5} = \frac{5}{24}$$

שאלה 16

קיימים עומדים עקיבים: למשל לפי החוק החלש, ממוצע המשתנים במקומות הזוגיים שואף בהסתברות לתוחלת המשתנים, זאת אומרת ל λ .
יש אפילו אומדן חסר הטיות המתבסס רק על המשתנה השני: לערכו של המשתנה השני יש תוחלת של λ .

שלומי