
<u>שאלה 1</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
האם אפשר לכוון את קשתותיו של כל גרף מישורי, פשוט, דו-צדדי, כך שדרגת היציאה של כל צומת תהיה לכל היותר 2 ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>פתרון</u> : כן

בגרף מישורי בעל אורך מעגל מינימלי- g אין יותר מ $\frac{g}{g-2}(v-2)$ קשתות. בגרף דו-צדדי אורך מעגל מינימלי הוא לפחות 4. לכן בגרף המדובר אין יותר מ $2v-4$ קשתות. לכן סכום הדרגות בו אינו עולה על $4v-8$. לכן קיים בו צומת בדרגה לא יותר גבוהה מ 3 . נוכיח את הטענה באינדוקציה. עבור גרף בעל פחות מ 4 צמתים בודאי יש אופן כיוון מתאים. נניח שעבור כל גרף המקיים את התנאים הרשומים שבו לכל היותר $n-1$ צמתים יש כיוון כנדרש ונראה שגם עבור כל גרף שבו n צמתים יש כיוון כזה. אם נסיר זמנית מהגרף צומת בעל דרגה לא יותר גבוהה מ 3 אז בגרף הנותר יש כיוון כנדרש. נוסיף את הצומת שהסרנו וזמנית נכוון את כל הקשתות שנוגעות בו כיוצאות ממנו. כעת נרצה להפוך את הכיוון של אחת מקשתותיו מבלי להפר את החוקיות הקיימת לגבי הצמתים האחרים. נסתכל על אוסף המסלולים המכוונים שיוצאים מהצומת שהוסף. המסלולים מגיעים לקבוצת צמתים. בתת הגרף הלא מכוון המושרה על קבוצת צמתים זו הדרגה הממוצעת קטנה מ 4. מכיון שבכל אופן כיוון בכל תת גרף ממוצע דרגות הכניסה שווה לממוצע דרגות היציאה לכן ממוצע דרגות היציאה קטן מ 2 ולכן קיים צומת בעל דרגת יציאה קטנה מ 2 . נהפוך את כל כיווני הקשתות באחד המסלולים מהצומת שהוסף לצומת שהיה בעל דרגת יציאה קטנה מ 2. בכך לא ישתנו דרגות היציאה של הצמתים הפנימיים במסלול. בשני צמתי הקצה לא תהיה דרגת יציאה גבוהה מ 2.

<u>שאלה 2</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
האם כל גרף פשוט בעל $n \geq 7$ צמתים ולפחות $3n-2$ קשתות מכיל תת גרף 4-קשיר בקשתות ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>פתרון</u>: כן

הגרף השלם בעל n צמתים מכיל $\frac{(n-1)n}{2}$ קשתות. עבור $n<7$ מתקיים $\frac{(n-1)n}{2}<3n-2$. לכן בגרף פשוט בעל $3n-2$ קשתות יש לפחות 7 צמתים. אם $n=7$ אז הגרף כולל $3\cdot 7-2=19$ קשתות. זהו קליק שהוחסרו ממנו שתי קשתות. זהו גרף 4-קשיר (עבור כל זוג צמתים, יש להם לפחות 4 שכנים משותפים או קשת ביניהם וגם שלושה שכנים משותפים). נניח שעבור כל k , $k<n$, גרף בעל k צמתים ו $3k-2$ קשתות יש תת גרף 4-קשיר. נראה שגם עבור כל גרף שבו n צמתים ו $3n-2$ קשתות יש תת גרף 4-קשיר. נניח בשלילה שקיים גרף כזה לו אין תת גרף 4-קשיר. גרף כזה בעצמו אינו 4-קשיר, לכן ניתן להסיר ממנו פחות מ 4 קשתות ולקבל שני רכיבי קשירות. נניח שבאחד מהם יש a צמתים ובשני יש b צמתים. אם בכל אחד משנהם אין תת גרף 4-קשיר, אז בראשון יש לכל היותר $3a-3$ קשתות ובשני יש לכל היותר $3b-3$ קשתות. אך הסרנו לכל היותר 3 קשתות. לכן נקבל שבגרף כולו יש לכל היותר $3a-3+3b-3+3=3a+3b-3=3n-3$ קשתות. זאת סתירה.

<u>שאלה 3</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
יהא $G(V,E)$ גרף פשוט בעל $n \geq 3$ צמתים, ויהא v צומת מדרגה מכסימלית ב- G נניח ש- v אינו מוכל במשולש. האם בהכרח $|E| \leq n^2/4$? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>**פתרון**</u> : כן
נניח שהדרגה של הצומת היא k. מכיון שאין בגרף משולשים אז אין קשתות בין כל שניים משכניו. לכן לכל אחד מ k השכנים יש דרגה לכל היותר $n-k$. סכום הדרגות של k השכנים הוא לכל היותר $k(n-k)$. לכל אחד מ $n-k$ הצמתים כולל v עצמו שאליהם אין ל v קשת יש דרגה לכל היותר k שהיא הדרגה המכסימלית בגרף. לכן סכום הדרגות של צמתים אלה הוא לכל היותר $(n-k)k$. לכן סכום הדרגות של כל צמתי הגרף אינו יותר מ $2k(n-k)$. לכן מספר הקשתות בגרף אינו גדול מ $k(n-k)$.
עבור כל k מתקיים $k(n-k) \leq n^2/4$.

<u>שאלה 4</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
יהא Γ אוסף של יותר מ $\binom{100}{40}$ תת-קבוצות של הקבוצה $X = \{1,2,\cdots,100\}$ כאשר לכל $F \in \Gamma$ מתקיים $39 \leq |F| \leq 40$. האם בהכרח יש $F_1, F_2 \in \Gamma$ שונות כך ש- $F_1 \subseteq F_2$? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>**פתרון**</u>: כן
נסתכל על הגרף הדו-צדדי שצמתי הצד האחד שלו הם כל התת קבוצות בגודל 40 וצמתי הצד השני שלו הם כל התת קבוצות בגודל 39. שני צמתים יהיו מחוברים אם תת קבוצה אחת שאחד מייצג מכילה את תת הקבוצה שהאחר מייצג. הדרגה של כל צומת בצד הראשון היא $\binom{40}{39} = 40$. הדרגה של כל צומת בצד השני היא $100-39=61$. לכן לכל צומת שבצד השני יש דרגה גבוהה יותר מאשר לכל צומת שבצד הראשון. לכן קיים זיווג שמרווה את כל צמתי הצד השני *. בצד הראשון יש רק $\binom{100}{40}-\binom{100}{39}$ צמתים שאינם מרווים. לא ניתן לבחור אוסף תת קבוצות בגודל יותר מ $\binom{100}{40}$ מבלי שנבחר לפחות זוג אחד של צמתים שהם קצוות של אותה קשת בזיווג. לכן חייבים לבחור לפחות זוג אחד של תתי קבוצות שאחת מכילה את האחרת.

* בגרף דו צדדי בו לכל צומת שבצד ב' יש דרגה ששווה לפחות לדרגת כל צומת שבצד א', יש זיווג שמרווה את כל צמתי צד ב'. <u>הסבר</u>: לכל צומת שבצד ב' יש דרגה לפחות k , לכן לגבי כל תת קבוצה S של צמתי צד ב', יוצאות ממנה לפחות $k|S|$ קשתות. מכיון שכל הדרגות של צמתי צד א' אינן גבוהות מ k, אז הן נוגעות בלפחות $|S|$ צמתים של צד א'. לפי משפט הול זה מספיק לקיום זיווג שמרווה את כל צמתי צד ב'.

<u>שאלה 5</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)

<u>א</u>. הוכח שכל גרף 10-רגולרי עם $n > 220$ צמתים מכיל זיווג בגודל 101.

<u>ב</u>. הראה דוגמא של גרף פשוט 10-רגולרי עם 220 צמתים שאינו מכיל זיווג בגודל 101.

<u>פתרון</u>:

<u>א</u>. בגרף 10-רגולרי עם לפחות 221 צמתים יש לפחות $\frac{10\cdot 221}{2}$ קשתות. הגרף הוא 11-צביע לכן קיימות לפחות $\frac{10\cdot 221}{2\cdot 11}$ (שזה יותר מ 100) קשתות שצבועות באותו צבע בצביעה חוקית. לכן קיימות לפחות 101 קשתות שצבועות באותו צבע. מכיון שלקשתות שצבועות באותו צבע, אין צמתי קצה משותפים אז אוסף הקשתות שצבועות באותו צבע מהוות זיווג. לכן יש זיווג בגודל 101.

<u>ב</u>. הדוגמא תהיה של איחוד 20 קליקות זרות של 11 צמתים. בכל קליק של 11 צמתים אין זיווג של יותר מ 5 קשתות. בסך הכל אין זיווג של יותר מ $20\cdot 5 = 100$ קשתות.

<u>שאלה 6</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)

האם בכל גרף פשוט G עם מספר צביעה $\chi(G) = k$ יש לפחות $\binom{k}{2}$ קשתות ?

הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>פתרון</u>: כן

נסתכל על צביעה חוקית על-ידי k צבעים. נראה שעבור כל זוג צבעים יש קשת שבשני קצותיה יש שני צמתים שצבועים בשני צבעים אלה. נניח בשלילה שעבור זוג צבעים כחול וירוק אין קשת כזאת. במקרה זה נוכל לשנות את צבעם של כל הצמתים הצבועים כחול לירוק ולקבל צביעה חוקית על-ידי $k-1$ צבעים. סתירה.

<u>שאלה 7</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)

האם לכל גרף מישורי פשוט $G = (V, E)$ יש חלוקה $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ של קבוצת הצמתים ל 3 קבוצת זרות בזורות, כך שלכל i , $1 \le i \le 3$, התת גרף של G הנפרש על V_i הוא אציקלי ?

הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>פתרון</u>: כן

בגרף מישורי V יש לא יותר מ $3|V| - 6$ קשתות. לכן סכום הדרגות בגרף אינו יותר מ $6|V| - 12$.

לכן בגרף יש צומת בדרגה קטנה מ 6.

עבור גרף של של צומת אחד בודאי יש חלוקה כנדרש. נניח שעבור כל גרף שבו $n-1$ צמתים יש חלוקה כנדרש ונראה שגם עבור כל גרף שבו n צמתים יש חלוקה כנדרש. נסתכל על גרף שבו n צמתים. נסיר ממנו צומת בעל דרגה קטנה מ 6. בגרף הנותר יש לפי הנחת האינדוקציה חלוקה כנדרש. מכיון שלצומת שהסרנו יש דרגה לכל היותר 5 בגרף כולו, אז בלפחות אחת מהקבוצות יש לצומת שהסרנו לכל היותר שכן אחד. נצרף אותו לקבוצה זאת. מכיון שיש לו רק שכן אחד בקבוצה אז הוספתו לקבוצה לא תסגור מעגל.

<u>שאלה 8</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)

יהיו $G_1(V,E_1)$, $G_1(V,E_2)$ ו $G_1(V,E_3)$ שלושה גרפים מישוריים פשוטים על אותה קבוצת צמתים V, ויהא $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$. האם יתכן כי מספר הצביעה של G מקיים $\chi(G)=20$?
הוכח/י !

<u>פתרון</u>: לא

בכל אחד מהגרפים המישוריים אין יותר מ $3|V|-6$ קשתות.

לכן מתקיים $|E_1|+|E_2|+|E_3|\le 9|V|-18$. לכן סכום הדרגות בגרף $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ אינו יותר מ $18|V|-36$. נראה שהגרף הוא 19-צביע. עבור גרף בעל צומת בודד בודאי קיימת צביעה כזאת. נניח שעבור כל גרף בעל $k-1$ צמתים יש צביעה חוקית על-ידי 19 צבעים ונראה שגם עבור גרף בעל k צמתים יש צביעה חוקית ב 19 צבעים. מכיון שסכום הדרגות בגרף אינו עולה על $18|V|-36$ אז הצומת בעל הדרגה המינימלית הוא בעל דרגה נמוכה מ 19. אם נסיר אותו ואת כל הקשתות שנוגעות בו מהגרף, אז נקבל תת גרף שאוסף הקשתות שלו מורכב מקשתות של שלושה גרפים מישוריים. לכן תת גרף זה הוא 19-צביע. מכיון שהדרגה של הצומת שהסרנו נמוכה מ 19 אז יש צבע שלא מיוצג בין שכניו. נצבע את הצומת שהסרנו בצבע שלא מיוצג בין שכניו.

<u>שאלה 9</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)

האם בכל גרף פשוט על $n\ge 10$ צמתים עם דרגה מינימלית $\delta\ge\frac{n+1}{2}$ מכיל מעגל מאורך 7 בדיוק דרך כל צומת ? הוכח/י !

<u>פתרון</u>: כן

נראה שעבור צומת w בגרף G עובר מעגל מאורך 7 בדיוק. נסתכל על תת הגרף המושרה על קבוצת הצמתים $V\setminus w$. בגרף זה יש $n-1$ צמתים. הדרגה של כל צומת בגרף זה היא לפחות $\frac{n+1}{2}-1=\frac{n-1}{2}$. לכן בתת גרף זה יש מעגל המילטון. נסתכל על אוסף הזוגות של הצמתים שנמצאים במרחק 5 אחד מהשני על מעגל זה. כל צומת מיוצג באותו מספר זוגות. מכיון שלצומת w יש קשתות ליותר ממחצית צמתי הגרף, אז יש לו קשתות ללפחות זוג אחד מאוסף הזוגות. נצביע על מעגל שעובר דרך שתי הקשתות של w לשני בני הזוג ודרך המסלול באורך 5 שבין שני בני הזוג.

<u>שאלה 10</u> (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)

מהו מספר העצים הפורשים של הגרף השלם על קבוצת 26 הצמתים $\{a,b,\cdots,z\}$ שבהם a ו- b הם עלים?

<u>תשובה</u>: $24^{22}\cdot 24^{2}=24^{24}$

הגרף המושרה על יתר $26-2=24$ הצמתים הוא עץ פורש. הוא יכול להיות כל עץ פורש על קבוצת צמתים זו. יש 24^{22} עצים כאלה. את כל אחד מהצמתים a ו b צריך להצמיד לאחד הצמתים האחרים, כך שלגבי כל אחד מבין a ו b יש 24 אפשרויות.

שאלה 11 (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
יהא G גרף (פשוט) שצמתיו הן n נקודות שונות במישור, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$, וזוג נקודות שונות (x_i,y_i) ו (x_j,y_j) הן מחוברות $\Leftrightarrow$ $x_i = x_j$ או $y_i = y_j$. האם מספר הצביעה של G שווה בהכרח לגודל הקליק המירבי בו ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

פתרון: כן
בכל גרף מספר הצביעה לא קטן מגודל הקליק המכסימלי, זאת כי צריך לצבוע כל צומת בקליק בצבע שונה. נראה שבגרף זה מספר הצביעה לא גדול מגודל הקליק המכסימלי. יהי k גודל הקליק המכסימלי. בהינתן צביעה חוקית של קבוצה חלקית של הצמתים ב k צבעים, נראה שקיימת צביעה של קבוצה זאת בתוספת צומת נוסף. נתן זמנית לצומת זה צבע שלא מופיע בעמודתו. נקרא לצבע זה כחול. אם בשורתו לא מופיע צבע כחול אז קבלנו צביעה חוקית של תת הגרף המושרה על-ידי קבוצת הצמתים ובנוסף הצומת החדש. אחרת בשורתו של הצומת החדש אף צומת לא צבוע בצבע אחר (לא יתכן שכל k הצבעים ייוצגו בשורה וגם אחד מהם ייוצג פעמיים). נקרא לצבע שלא מיוצג בשורה ירוק.
נסתכל על תת הגרף המושרה על-ידי קבוצת צמתים שמורכבת משני הצמתים שצבועים זמנית בכחול וכל צומת שיש אליו מסלול משני צמתים אלה על-ידי קשתות שלגבי כל אחת מהן, קצה אחד צבוע כחול והקצה האחר צבוע ירוק. אם בתת גרף זה קיים מעגל אז בדיוק כל קשת שניה בו, משקפת עמודה משותפת, לכן אורך המעגל הוא זוגי. לכן נתן לצבוע את צמתי תת גרף זה בשני צבעים כחול וירוק.
בכך קבלנו צביעה חוקית ב k צבעים של קבוצה שאליה נוסף צומת נוסף. כך נוכל לצבוע את כל צמתי הגרף ב k צבעים.

שאלה 12 (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
יהא G גרף פשוט בו לכל זוג צמתים שונים יש מספר אי זוגי של שכנים משותפים. האם בהכרח יש ב-G מעגל אוילר ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

פתרון: כן
הגרף קשיר כי לכל שני צמתים יש לפחות שכן אחד משותף, לכן יש בינהם מסלול. נניח בשלילה שיש צומת v בעל מספר אי זוגי של שכנים. נסתכל על תת הגרף המושרה על-ידי קבוצת הצמתים שהם שכניו. לכל צומת w בגרף זה יש מספר אי זוגי של שכנים משותפים עם v. כל שכן משותף הוא צומת בתת גרף זה. לכן לכל צומת w יש בתת גרף זה דרגה אי זוגית. מכיון שבתת גרף זה יש מספר אי זוגי של צמתים אז סכום הדרגות של צמתיו הוא אי זוגי. אך בכל גרף סכום הדרגות הוא זוגי כי כל קשת תורמת 2 לסכום הדרגות. קבלנו סתירה לקיומו של צומת בעל דרגה אי זוגית.

שאלה 13 (מבחינה של פרופ' נוגה אלון)
יהא G גרף פשוט בעל 100 צמתים ו- 449 קשתות. האם G מכיל בהכרח קבוצה בלתי תלויה בת 11 צמתים ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

תשובה כן
נראה שכשלון בתהליך מציאת קבוצה בלתי תלויה כזאת גורר שיש בגרף לפחות 450 קשתות. נתחיל בצומת בודד ובכל שלב, כל עוד זה אפשרי, נוסיף לקבוצה צומת שאין לו שכן לצמתים שאותם הוספנו עד כה. לפי ההנחה שאין קבוצה בלתי תלויה כנדרש נעצר לפני שנצבור 11 צמתים. לכן ללפחות 90 צמתים אחרים יש שכן בקבוצה שיצרנו. כעת נזרוק מהגרף 10 צמתים שכוללים את הצמתים שאותם צברנו.

בתת הגרף המושרה על יתר הצמתים נמשיך ונפעיל את אותה פרוצדורה עד ששוב נעצר ושוב נזרוק 10 צמתים. כך נמשיך 9 פעמים ונקבל שיש בגרף לפחות $90+80+\cdots+10=450$ קשתות.
הערה: ניתן לפתור גם באמצעות משפט טורן.

שאלה 14 **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**
האם לכל גרף פשוט וקשיר בעל $n\ge 10$ צמתים ודרגה מירבית 3 יש חלוקה של קבוצת הצמתים V לקבוצות זרות בזוגות $V=V_1\cup\cdots\cup V_k$ כך שהתת גרף הנפרש על כל V_i קשיר וכן $10\le |V_i|<30$ לכל i ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

פתרון: כן
נתאר תהליך בניה של חלוקה זאת. נבנה את הקבוצות אחת אחר השניה. עבור כל קבוצה נסיר את הצמתים שבה ואת הקשתות שנוגעות בהם מהגרף. נדאג שהגרף שיותר יורכב מאוסף רכיבי קשירות שעונים לתנאים הראשונים. אם כאשר נגיע לבחירת קבוצה יותרו בגרף פחות מ 30 צמתים אז נקבע אותו כאיבר בחלוקה. אחרת נבחר צומת שרירותי ונתחיל בהוספת צמתים שכנים לקבוצת הצמתים שאנו בוחרים בשלב זה. בגלל הקשירות תמיד אפשר למצוא צומת שכן. אם נצבור לפחות 10 צמתים מבלי שפגענו בקשירות של הגרף שנותר, אז נקבע את קבוצת הצמתים שצברנו כאיבר בחלוקה. אם לפני כן באיזשהו שלב פגענו בקשירות, אז בגלל שכל הדרגות בגרף אינן עולות על 3 , אז נוצרו באותו שלב בדיוק שני רכיבי קשירות (לא כוללים את הרכיב שבו צוברים צמתים). כל רכיב שבו יהיו פחות מ 10 צמתים, נצרף לקבוצת הצמתים שבה אנו צוברים. גם עם התוספת של צמתים אלה, לא נגיע לצבירה של יותר מ $28=9+9+10$ צמתים לקבוצה. ברכיב קשירות שבו לפחות 10 צמתים, נפעיל לחוד את האלגוריתם, אלא אם כן בקבוצה שצברנו (שאולי קבלה בשלב זה תוספת של רכיב קטן), יש פחות מ 10 צמתים ואז נמשיך לצבור צמתים לקבוצה הנוכחית מאחד הרכיבים שבו לפחות 10 צמתים.

שאלה 15 **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**
יהא $k\ge 2$ שלם. האם לכל גרף פשוט שדרגת כל צומת בו k או $k+1$ מכיל תת גרף פורש שדרגת כל צומת בו k או $k-1$? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

פתרון: כן
בתחילה כל עוד קיימות קשתות בין צמתים שהיו בדרגה $k+1$ נמחק קשתות שמחברות בין שני צמתים שהיו בדרגה $k+1$. אם ישארו צמתים בדרגה $k+1$ לאחר מחיקות אלה, אז נצטרך מכל אחד מהם להוריד קשת שמחברת אותו לצומת שבדרגה k. נסתכל על הגרף הדו צדדי שבו קבוצת הקשתות היא אלה שבקצה אחד שלהן צומת בדרגה $k+1$ ובקצה השני שלהן צומת בדרגה k. מכיון שכבר אין קשתות שמחברות צמתים שבדרגה $k+1$, אז בגרף הדו צדדי, הדרגה של כל צומת מבין אלה היא $k+1$. בצד השני כל צומת הוא בדרגה לא יותר גבוהה מ k. עבור כל תת קבוצה S של הצד הראשון יש לה לפחות $\frac{k+1}{k}|S|>|S|$ שכנים. לפי משפט הול, אם לגבי כל תת קבוצה של צמתים מצד א', הקשתות שיוצאות ממנה נוגעות במספר צמתים שלא קטן מגודל תת הקבוצה, אז קיים זיווג שמרווה את כל צמתי צד א'. נסיר מהגרף את כל קשתות זיווג זה ונקבל תת גרף כמבוקש.

<u>שאלה 16</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט וקשיר, ובו צומת $v\in V$ מדרגה $d_G(v)=15$. הוכח/י שיש ל- G תת-גרף פורש $H=(V,E')$ כך שלכל צומת $u\in V$ מתקיים $\left\lfloor \frac{d_G(u)}{2} \right\rfloor \le d_H(u) \le \left\lceil \frac{d_G(u)}{2} \right\rceil$, כאשר כאן $d_H(u)$ מסמן את דרגת u בגרף H, ו- $d_G(u)$ את דרגת u בגרף G.

<u>הוכחה</u>:

מכיון שבכל גרף סכום דרגות הצמתים הוא זוגי, אז מספר הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית הוא זוגי. נחלק את קבוצת הצמתים בעלי דרגה אי-זוגית לזוגות ונוסיף לגרף המקורי את הקשתות שמחברות כל צומת בעל דרגה אי-זוגית עם בן זוגו. הגרף המתקבל הוא גרף קשיר שבו כל הדרגות זוגיות (הערה: יתכן שהגרף המתקבל אינו גרף פשוט). בגרף כזה קיים מעגל אוילר. אם נעבור על-פני קשתות המעגל לפי הסדר שהמעגל מתווה ונסמן כל קשת אי-זוגית במעגל, אז לגבי כל צומת שאינו הראשון במעגל, נסמן את בדיוק מחצית קשתותיו. לגבי הצומת שהוא הראשון במעגל, אם אורך המעגל זוגי אנו נסמן את מחצית קשתותיו, ו אם אורך המעגל הוא אי-זוגי, נסמן קשת אחת יותר ממחצית קשתותיו. נתחיל את המהלך בצומת שהיה בגרף המקורי בעל דרגה 15 ונעבור תחילה על הקשת שנוספה לו בזיווג. כעת נמחק מאוסף הקשתות שאותן סמנו את אלה מביניהן שנוספו בזיווג. כך לגבי כל צומת, ישארו מסומנות מספר קשתות שעונה לדרישות.

<u>שאלה 17</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

יהא G גרף פשוט בעל מספר צביעה $\chi(G)=k$. הוכח/י שיש ב- G לפחות k צמתים שדרגתם לפחות $k-1$.

<u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה שיש פחות מ k צמתים שדרגתם לפחות $k-1$. נסתכל תחילה על הגרף המושרה על קבוצת צמתים זו. מכיון שיש בגרף מושרה זה פחות מ k צמתים אז ניתן לצבוע אותם צביעה חוקית ב $k-1$ צבעים. כעת נוסיף את יתר הצמתים ואיתם את קשתותיהם לתת גרף זה, אחד אחר השני עד שנקבל את כל הגרף G, תוך שגם נצבע את הצמתים ונשמור על חוקיות הצביעה בכל שלב. לפי ההנחה, לכל אחד מהצמתים שאנו מוסיפים יש דרגה קטנה מ $k-1$. לכן לכל אחד מהם ניתן לתת צבע אחד מתוך $k-1$ הצבעים שבהם צבענו את $k-1$ הצמתים הראשונים. קבלנו סתירה לכך שמספר הצביעה הוא k.

<u>שאלה 18</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

האם כל גרף פשוט בעל $2n\ge 4$ צמתים ודרגה מינימלית $n+1$ מכיל תת גרף פורש 3-רגולרי. הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>תשובה</u>: כן

על-פי משפט דירק, גרף בעל $2n$ צמתים ודרגה מינימלית $n+1$ מכיל מעגל המילטון. מכיון שמספר צמתי הגרף הוא זוגי אז אורך המעגל הוא זוגי ולכל צומת חוזרים לאחר מעבר על מספר זוגי של קשתות מהמקום שיצאנו ממנו. נבחר כל קשת שניה במעגל (זהו זיווג). כעת נסתכל על תת-הגרף שנוצר לאחר הסרת הקשתות האלה. זהו גרף בעל דרגה מינימלית n. על-פי משפט דירק, גם בו יש מעגל המילטון. תת הגרף ה-3 רגולרי הפורש שנבחר מכיל את מעגל המילטון הזה ואת קשתות הזיווג שנבחר קודם.

<u>שאלה 19</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

יהא G גרף דו-צדדי עם קבוצת צמתים A, B ונניח שלכל צומת $a \in A$ יש דרגה חיובית גדולה או שווה מדרגתו של כל אחד משכניה. הוכח/י כי יש ב- G זיווג המרווה את כל צמתי A.

<u>**הוכחה**</u>:

בגרף דו צדדי, תנאי מספיק והכרחי לקיום זיווג המרווה את כל צמתי צד A הוא שלכל תת קבוצה של צמתי A, מספר שכניה אינו קטן מגודלה.

נניח בשלילה, שאין זיווג המרווה את כל צמתי צד A. נסתכל על קבוצת צמתים A' שמספר שכניה קטן מגודלה ושהיא לא מכילה אף תת קבוצה אחרת שמספר שכניה קטן מגודלה. לכל קבוצה חלקית ממש של A' יש זיווג המרווה את כל צמתיה. לכן קיים זיווג המרווה את כל צמתי A' חוץ מאחד שנקרא לו v'.

קבוצת השכנים של צמתי A' הם רק $|A'|-1$ הצמתים המזווגים לקבוצת צמתי A' שלא כוללת את v'.

לכל צומת ב A יש דרגה ששווה לפחות לדרגת בן זוגו בזיווג. מכיון שהזיווג הוא התאמה חד חד-ערכית, אז מספר הקשתות היוצאות מצמתי A' המזווגים לשכניהם, שווה לפחות למספר הקשתות היוצאות משכניהם לצמתי A' (כמובן שכל הקשתות היוצאות מצמתי A', יוצאות לשכניהם, בזמן שלשכניהם יש אולי עוד שכנים). אך גם מהצומת v' יש לפחות קשת אחת שיוצאת לשכני A'. לכן מספר הקשתות שיוצאות מצמתי A' לשכניהם גדול ממספר הקשתות שיוצאות מהשכנים אל צמתי A'. מכיון שבגרף דו-צדדי, לכל קשת יש קצה אחד בכל צד, אז סכום הדרגות בשני הצדדים צריך להיות שווה. קבלנו סתירה להנחה.

<u>שאלה 20</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

האם לכל גרף פשוט עם דרגה מירבית 4 יש צביעת (לאו דווקא חוקית) בשני צבעים ללא משולש מונוכרומטי ? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>**תשובה**</u> כן

נוכיח באינדוקציה. עבור גרף שבו לכל היותר 5 צמתים צביעה כזאת אפשרית כי $r(3,3)=6$. נניח שצביעה כזאת אפשרית עבור כל גרף כזה שבו $n-1$ צמתים ונראה שהיא אפשרית גם עבור גרף שבו n צמתים. נסתכל על גרף שבו n צמתים. נצבע כנדרש תת גרף המושרה על $n-1$ מצמתיו. כעת נוסיף את הצומת הנוסף עם הקשתות שנוגעות בו. אם דרגתו קטנה מ 4 אז נצבע את כל אחת מקשתותיו באקראי באחד הצבעים באופן בלתי תלוי באחרות. כל קשת מתת הגרף המושרה על שכניו תסגור מעגל בסיכוי $\frac{1}{4}$ ומכיון שבתת גרף זה יש לכל היותר 3 קשתות אז תוחלת מספר המשולשים המונוכרומטים שיוצרו תהיה קטנה מ 1 ולכן ברור שאפשרי שלא יוצרו משולשים כאלה. אם דרגת הצומת היא 4 אז נצבע בדיוק שתי קשתות אקראיות בכל צבע. כל קשת בתת הגרף המושרה על שכניו תהיה על משולש מונוכרומטי בסיכוי $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. אם בתת הגרף המושרה על שכניו יש לא יותר מ 5 קשתות אז שוב תוחלת מספר המשולשים המונוכרומטים תהיה קטנה מ 1 ולכן קיימת צביעה ללא משולשים כאלה. אחרת תת הגרף המושרה עליו ועל שכניו הוא K_5 ומכיון שדרגת כל צומת ב K_5 היא 4 אז הוא מהווה רכיב קשירות נפרד. ניתן לצבוע את K_5 כנדרש ועל פי הנחת האינדוקציה ניתן לצבוע כנדרש גם את יתר רכיבי הקשירות.

<u>הערה</u>: ניתן לפתור גם בדרכים אחרות.

<u>שאלה 21</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

יהא G גרף פשוט בעל $2n+1 \geq 5$ צמתים עם דרגה מינימלית $n+1$ ויהיו u,v צמתים של G. האם בהכרח יש ב- G מעגל מאורך $n+1$ המכיל את u ואת v? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>תשובה</u>: לא

נתן דוגמא נגדית. הדוגמא היא של הגרף השלם K_5 שממנו הורדה קשת אחת. הדרגה המינימלית היא 3 אך אין קשת בין שני הצמתים שבדרגה 3 ולכן הם לא על משולש אחד.

<u>שאלה 22</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

יהא G גרף פשוט בעל לפחות $k+1$ צמתים ונניח שלכל זוג צמתים <u>לא</u> מחוברים u ו v סכום דרגותיהם מקיים $d(u)+d(v) \geq 2k$. האם בהכרח הדרגה הממוצעת ב- G היא לפחות k? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>תשובה</u>: כן

אם נגריל אקראית שני צמתים שאינם מחוברים בקשת ואחר-כך נבחר אקראית את אחד מהם אז הסיכוי של כל צומת להיבחר פרופורציונאלי לדרגתו בגרף המשלים. כך לכל צומת בעל דרגה גבוהה מדרגה ממוצעת במשלים יהיה סיכוי גבוהה יותר להיבחר מאשר לצומת בעל דרגה נמוכה מהממוצעת במשלים. כך, הדרגה הממוצעת בגרף המשלים של הצומת הנבחר תהיה לא קטנה יותר מדרגה ממוצעת בגרף המשלים. כך דרגתו בגרף המקורי תהיה לא גדולה מדרגה ממוצעת בגרף. אך הדרגה הממוצעת של הצומת הנבחר היא לפחות $\frac{2k}{2}=k$. לכן הדרגה הממוצעת בגרף היא לפחות k.

<u>שאלה 23</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

יהא $G=(V,E_1 \cup E_2)$ גרף פשוט חסר משולשים כאשר (V,E_1) גרף מישורי ו- (V,E_2) עץ. האם יתכן כי $\chi(G)=7$? הוכח/י או תאר/י דוגמא נגדית.

<u>תשובה</u>: לא

נראה שיש צביעה חוקית ב-6 צבעים. מכיון שבגרף G אין משולשים אז גם בגרף (V,E_1) אין משולשים. בגרף מישורי בעל אורך מעגל מינימלי g אין יותר מ $\frac{g}{g-2}(v-2)$ קשתות. בגרף מישורי ללא משולשים אורך מעגל מינימלי הוא לפחות 4. לכן בגרף (V,E_1) אין יותר מ $2V-4$ קשתות. ב (V,E_2) אין יותר מ $V-1$ קשתות. לכן ב G אין יותר מ $3V-5$ קשתות. לכן הדרגה הממוצעת בו היא קטנה מ-6. לכן יש בו לפחות צומת אחת בעל דרגה לא יותר מ-5. נניח שיש גרף העונה לתיאור זה שאינו 6-צביע. במקרה זה יש גרף כזה בעל מספר צמתים מינימלי שאינו 6-צביע. אם נסיר מגרף זה צומת ואת כל הקשתות הנוגעות בו, אז נקבל גרף שכל קשתותיו הן איחוד קבוצת קשתות של גרף מישורי ושל גרף חסר מעגלים. מכיון שהגרף שממנו הוסר הצומת הוא גרף מסוג זה בעל מספר מינימלי של צמתים, אז לאחר הסרת הצומת נקבל גרף שהוא 6-צביע. נבחר את הצומת שמוסר זמנית להיות צומת בעל דרגה שאינה גדולה מ-5 (שאת קיומו הראנו). לאחר שנצבע את יתר הצמתים ב-6 צבעים, נוסיף אותו ונצבע אותו באחד משש הצבעים שלא מיוצג בין שכניו. קיבלנו סתירה לקיומו של גרף כזה.

<u>שאלה 24</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון ופרופ' וויצ'ך סמוטי)**

הראה/י כי קיים n_0 כך שעבור כל $n > n_0$ המשפט הבא נכון. אם G הוא גרף בעל n צמתים ולכל היותר $0.99n$ קשתות אזי G מכיל שני רכיבי קשירות איזומורפיים.

<u>תשובה</u>

בגרף קשיר בעל n צמתים יש לפחות $n-1$ קשתות. כך אם יש לכל היותר $0.99n$ קשתות, אז יש לפחות $n-0.99n=0.1^2n$ רכיבי קשירות . מתוך רכיבי הקשירות האלה לפחות 0.1^3n רכיבי קשירות הם בני לכל היותר 10^3 צמתים (רכיבי הקשירות הם זרים וביחד הם לא יכולים להכיל יותר מ n צמתים). עבור כל רכיב קשירות בעל מספר צמתים קבוע יש רק מספר סופי של מבנים של גרפים.

לכן, בסך הכל עבור כל הגדלים שבין 1 ל 10^3 אין יותר ממספר סופי A של מבנים אפשריים. אם נבחר את n_0 כך שגם עבור כל $n > n_0$ יתקיים ש $0.1^3n > A$, אז לפי עקרון שובך היונים יהיו לפחות שני רכיבי קשירות איזומורפיים.

<u>שאלה 25</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון ופרופ' וויצ'ך סמוטי)**

הוכח/הוכיחי כי אם G גרף בעל n צמתים ודרגה מירבית d, ומתקיים $2n\binom{d}{k-1} < k2^{\binom{k}{2}}$ אז ישנה צביעה של קשתות G בשני צבעים ללא k_k מונכרומטי.

<u>תשובה</u>

נצבע כל קשת בכחול או בירוק באופן ב"ת בקשתות האחרות. כדי שיהיה k_k מונוכרומטי, צריך שעבור לפחות k צמתים יתקיים שיהיו להם $k-1$ שכנים שהקשתות אליהם מהצומת הן באותו צבע, וגם כל הקשתות שבין השכנים האלה הן באותו צבע מסוים. לכל צומת יש לא יותר מ $\binom{d}{k-1}$ קבוצות של $k-1$ שכנים. ההסתברות שעבור קבוצה מסוימת כזאת, כל הקשתות שבין השכנים ובין הצומת לשכניו בקבוצה יהיו כחולות היא $0.5^{\binom{k}{2}}$ ושכולן יהיו כחולות או ירוקות היא $2\cdot 0.5^{\binom{k}{2}}$, עבור צומת מסוים, תוחלת מספר הקבוצות האלה היא $2\binom{d}{k-1}0.5^{\binom{k}{2}}$ ועבור כל צמתי הגרף התוחלת היא $2n\binom{d}{k-1}0.5^{\binom{k}{2}}$. אם תוחלת זו קטנה מ k, אז קיימת הסתברות שיהיו פחות מ k צמתים כאלה וקיימת צביעה שיש בה פחות מ k צמתים כאלה.

<u>שאלה 26</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון ופרופ' וויצ'ך סמוטי)**

יהא $G=(V,E)$ גרף 14 רגולרי. הוכח/הוכיחי שקיימת חלוקה $E=E_1\cup E_2\cup E_3$ כך שלכל אחד משלושת הגרפים (V,E_1), (V,E_2), (V,E_3) הדרגה המירבית היא לכל היותר 5.

<u>תשובה</u>

גרף 14-רגולרי הוא 15 צביע בקשתות. כל אחת משלושת קבוצות הקשתות תורכב מקשתות של 5 צבעים (לכל קבוצה 5 אחרים). באף צומת לא נוגעות יותר מקשת אחת מאותו צבע. כך, בכל אחד משלושת הגרפים, הדרגה המכסימלית לא תהיה יותר מ 5.

<u>שאלה 27</u> **(מבחינה של פרופ' נוגה אלון)**

תהיינה $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ ו- $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ שתי פרמוטציות של המספרים $1,2,\cdots,n$. הוכח שקיימת פונקציה f , $f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{\pm1\}$ כך שלכל i, $1\le i\le n$ יתקיים

$$|f(\pi_1)+f(\pi_2)+\cdots+f(\pi_i)|\le 1$$

וכן

$$|f(\sigma_1)+f(\sigma_2)+\cdots+f(\sigma_i)|\le 1$$

<u>תשובה</u>

עבור כל אחת משתי הפרמוטציות, נסתכל על חלוקה של המספרים לזוגות של מספרים עוקבים בפרמוטציה החל מהאיבר הראשון בפרמוטציה. אם n הוא זוגי, אז לכל איבר בפרמוטציה יהיה בן זוג. אם n הוא אי זוגי, אז כל איבר חוץ מהאחרון ישובץ לזוג. נראה שניתן לצבוע את כל המספרים בצבעים $+1$ ו -1 , כך שכל איבר בפרמוטציה יהיה צבוע בצבע שונה מבן זוגו בפרמוטציה. כך כל הסכומים המצטברים במקומות הזוגיים יהיו שווים לאפס, והסכומים המצטברים במקומות האי זוגיים יהיו שווים ל $+1$ או ל -1. לגבי כל מספר, יש לכל היותר שני אילוצים, אילוץ אחד לכל היותר שנובע מכל אחת משתי הפרמוטציות. כל מספר ייוצג על-ידי צומת וכל אילוץ ייוצג על-ידי קשת. דרגת כל צומת היא לכל היותר 2. בכל מעגל שקיים בגרף, אחרי כל קשת שנובעת מאילוץ של אחת הפרמוטציות, באה קשת שנובעת מאילוץ של הפרמוטציה האחרת. לכן אורך כל מעגל הוא זוגי. לכן הגרף הוא דו צדדי והגרף הוא 2- צביע.

<u>שאלה 28</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי G גרף k-צביע. תהי $P \subseteq V(G)$ קבוצת קודקודים ב- G שבה כל שני קודקודים נמצאים במרחק 4 לפחות זה מזה ב- G. הוכח: לכל k-צביעה c_0 של P בצבעים $\{1,\ldots,k\}$ קיימת $(k+1)$-צביעה חוקית c של קודקודי G אשר מזדהה עם c_0 על P.

<u>פתרון</u> :

נתן לכל אחד מהקודקודים ב P את הצבע שלו ב c_0, לכל אחד מהקודקודים שאינם ב P ואינם שכנים של קודקוד ב P את הצבע שלו מצביעה אופטימלית מסוימת c_{opt} שמשתמשת בצבעים עם אותם שמות. בשלב ראשון נתן גם לכל אחד מהקודקודים שאינם ב P, אך הם שכנים של קודקוד ב P, גם כן את הצבע שלו מאותה צביעה אופטימלית c_{opt}. אם בכך יינתן לשכן של קודקוד מ P אותו צבע כמו של הקודקוד עצמו, אז נתקן את הצביעה של אותו שכן. לכל אותם קודקודים שיש להם את אותו צבע כמו לשכנם ב P נתן צבע מיוחד מסוים ששונה מכל צבעי c_{opt}. הודות לחוקיות הצביעה c_{opt}, אין שני שכנים של קודקוד מסוים מ P שיש ביניהם קשת ושניתן להם אותו צבע ובכלל זה הצבע של הצומת השכן שהוא ב P. בגלל שהמרחק בין כל שני קודקודים שב P גדול מ 3, אז אין קשתות בין שכנים של שני קודקודים שונים מ P.

<u>שאלה 29</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

נסמן ב- mK_2 את הזיווג בגודל m. הוכח: $R(mK_2)=3m-1$, כאשר $R(G)$ הוא מספר רמזי של G, שהוא המספר השלם המזערי n עבורו כל 2-צביעה של צלעותיו של הגרף השלם K_n מכילה עותק מונוכרומטי של G. (יש להוכיח גם את החסם התחתון וגם את העליון!)

<u>פתרון</u>:

<u>טענה</u>:

$$R(mK_2)\geq 3m-1$$

<u>הוכחה</u>:

נסתכל על גרף שבו $3m-2$ קודקודים. נסתכל בו על חלוקה לשתי קבוצות זרות של קודקודים : A בת $m-1$ קודקודים ו B בת $2m-1$ קודקודים. נצבע בכחול את כל הצלעות ששני קצוותיהן הם קודקודים מ B ונצבע בירוק את יתר הצלעות. במצב זה אין זיווג כחול בגודל m ואין זיווג ירוק בגודל m.

<u>טענה</u>:

$$R(mK_2)\leq 3m-1$$

<u>הוכחה</u>:

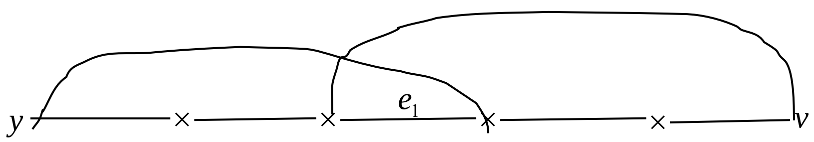
ההוכחה באינדוקציה. עבור זיווג בגודל 2 ברור שדי ב 2 קודקודים. נניח שעבור זיווג בגודל $k-1$ די ב $3(k-1)-1$ קודקודים. נסתכל על צביעה של גרף בגודל $3k-1$ קודקודים. אם עבור כל קודקוד כל הצלעות שנוגעות בו הן באותו צבע אז כל צלעות הגרף צבועות באותו צבע וברור שיש זיווג כנדרש. אחרת יש קודקוד שבו נוגעות צלעות משני הצבעים השונים. נניח שאלה צלעות vv_1 ו vv_2. על-פי הנחת האינדוקציה, בגרף המושרה על הקודקודים שאינם $\{v,v_1,v_2\}$ יש זיווג בגודל $k-1$ באחד הצבעים. יחד עם אחת הצלעות vv_1 או vv_2 נקבל זיווג בגודל k באחד הצבעים.

<u>שאלה 30</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי G גרף על $n \geq 3$ קודקודים מדרגה מזערית לפחות $\frac{n+1}{2}$. הוכח כי כל צלע של G נמצאת על מעגל המילטון ב- G.

<u>פתרון</u>:

נראה שצלע e נמצאת על מעגל. בשלב ראשון נאחד את u ואת v שהם הקצוות של e. אם לקודקוד מסוים היתה קודם צלע לאחד הקודקודים אז עדיין תהיה לו צלע לקודקוד החדש w. אם היו לו לשניהם אז תמשיך להיות לו צלע אחת ל w. לקודקוד w יש כעת דרגה של לפחות מחצית קודקודי הגרף. כל קודקוד אחר איבד לכל היותר צלע אחת ולכן יש לו דרגה של לפחות $\frac{n-1}{2}$ בגרף שבו $n-1$ קודקודים. לכן יש בגרף שהתקבל מעגל המילטון. נסתכל על מעגל כזה. ננסה להפריד בין u ו v ולשמור על המעגל. ל w יש שכנים x ו y. אם יש צלע בין u ל x ובין v ל y או להפך, אז נוכל ליצור מעגל. אחרת נצטרך להסתפק בחיבור u ל x וקבלת מסלול המילטון ששני קצוותיו v ו y. נוכל ליצור ממנו מעגל על-ידי שימוש בתהליך שמשורטט למטה: חיבורים לשני קודקודים שכנים ופתיחת הצלע e_1 שמחברת אותם. נוכל לעשות זאת כי לכל קודקוד יש דרגה של לפחות $\frac{n+1}{2}$ ואין צלע בין v ל y: אם אין צלע e_1 כזאת אז ברור שעבור כל שני קודקודים שכנים לפחות לאחד מהם אין קשר בין v לאחד או בין y לאחר ובסך הכל לפחות לאחד מבין v ו y יש דרגה של לכל היותר $\frac{n}{2}$.



<u>שאלה 31</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

הוכח כי כל גרף G על n קודקדים עם לפחות $2n-2$ צלעות מכיל שני מעגלים עם אורך שווה.

<u>פתרון</u>:

בגרף שבו n קודקודים ו $2n-2$ צלעות, צריך לסלק לפחות $n-1$ צלעות כדי שלא ישארו בו מעגלים. כל סילוק של צלע כזאת מבטל לפחות מעגל אחד. כל מעגל שמתבטל הוא באורך בין 3 ל n. יש סך הכל $n-2$ טבעיים בין 3 ל n. לכן לפי עקרון שובך היונים יש לפחות שני מעגלים בעלי אותו אורך.

<u>שאלה 32</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי G גרף קשיר על $n \geq 2$ קודקודים. עבור זוג u,v של קודקודי G נסמן ב- $dist(u,v)$ את המרחק בין u ל-v ב-G, שהוא המספר המזערי של צלעות במסלול בין u ל-v ב-G. הוכח:

$$\sum_{u \neq v \in V(G)} dist(u,v) \leq \binom{n+1}{3}.$$

<u>**פתרון**</u>:

<u>טענה</u>: סכום המרחקים מקבל ערך מכסימלי כאשר הגרף הוא עץ.

<u>הסבר</u>: מגרף שאינו עץ ניתן להוריד צלעות מבלי לקצר מסלולים.

<u>טענה</u>:

סכום המרחקים מקבל ערך מכסימלי כאשר העץ הוא שרוך (מסלול אחד באורך $n-1$).

<u>הסבר</u>:

נניח בדרך השלילה שלא כך. במצב כזה קיים בעץ קודקוד w בדרגה של לפחות 3. אם מסירים את הקודקוד w מהעץ אז מתקבלים לפחות שלושה תתי עצים. יהי w_1 שכן של w שמבין שכני w, בתת העץ שלו יש מספר מינימלי של קודקודים מבין תתי העצים. נבחר תת עץ אחר ונתלה אותו על w_1 במקום על w. בכך ישתנו אורכי מסלולים בלכל היותר 1. יותר מסלולים יתארכו ב 1 מאשר יתקצרו ב 1. נקבל סתירה לכך שבעץ שאינו שרוך יכול להתקבל סכום מרחקים מכסימלי.

כעת נראה באינדוקציה שבשרוך באורך $n-1$ סכום אורכי המסלולים הוא לא יותר מ $\binom{n+1}{3}$.

עבור $n=2$ זה מתקיים. נניח שעבור שרוך באורך $k-2$ הסכום הוא לא יותר מ $\binom{k}{3}$ ונראה שעבור מסלול באורך $k-1$ סכום המרחקים הוא לא יותר מ $\binom{k+1}{3}$. סכום המרחקים בין כל זוגות הקודקודים חוץ מאחד משני קצוות השרוך הוא לפי הנחת האידוקציה לא גדול מ $\binom{k}{3}$. סכום המרחקים מהקצה הוא $\frac{(1+(k-1))(k-1)}{2}$. מתקיים $\binom{k}{3}+\frac{(1+(k-1))(k-1)}{2} \leq \binom{k+1}{3}$.

<u>שאלה 33</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים, n זוגי, בו $d(u)+d(v) \geq n-1$ לכל זוג קודקודים $u \neq v \in V$. הראה: G מכיל זיווג מושלם.

<u>**פתרון**</u>:

נוסיף לגרף קודקוד שיחובר לכל יתר הקודקודים. בגרף בן $n+1$ הקודקודים מתקיים עבור כל זוג קודקודים u,v: $d(u)+d(v) \geq n+1$. לכן קיים בגרף מעגל המילטון. אם נוריד מהמעגל הזה את הקודקוד שהוספנו ואת הצלעות הנוגעות בו אז נקבל מסלול המילטון של הגרף המקורי. מסלול זה מכיל זיווג שמרווה את כל הקודקודים.

<u>שאלה 34</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי $G=(V,E)$ גרף על $|V|=1000$ קודקודים עם $|E|=250001$ צלעות. הוכח כי G מכיל שני משולשים החולקים צלע משותפת.

<u>**פתרון**</u>:

נוכיח באינדוקציה שבכל גרף בעל מספר קודקודים זוגי ובעל דרגה ממוצעת של יותר ממחצית קודקודי הגרף, יש שני משולשים בעלי צלע משותפת. עבור גרף בעל 4 קודקודים הדבר מתקיים.

נניח שבכל גרף בעל k קודקודים וסכום דרגות של יותר מ $\frac{k^2}{2}$ יש בהכרח שני משולשים כנדרש ונרצה להראות שבכל גרף בעל $k+2$ קודקודים וסכום דרגות של יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}$ גם בהכרח יש שני משולשים כנדרש. בגרף בעל $k+2$ קודקודים נסתכל על איזשהו זוג קודקודים המחוברים בצלע. אם אין להם שכן משותף אז יוצאות מהם לכל היותר k צלעות לקודקודים אחרים. בגרף כולו סכום הדרגות הוא יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}$. לכן בתת הגרף המושרה על-ידי יתר הקודקודים סכום הדרגות הוא יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}-2k-2=\frac{k^2}{2}$. לכן על-פי הנחת האינדוקציה יש בתת גרף זה שני משולשים כנדרש.

נתייחס למקרה ששני הקודקודים כן נמצאים על משולש. נסתכל על משולש זה. די למצוא קודקוד נוסף שיש לו צלע ללפחות שניים מקודקודי משולש זה. אם אין קודקוד כזה, אז זה אומר שמשלושת קודקודי המשולש יוצאות לכל היותר $k-1$ צלעות ליתר קודקודי המשולש. לכן קיימים שניים משלושת הקודקודים שיוצאים מהם לא יותר מ $\frac{2}{3}(k-1)$ צלעות לקודקודים שאינם על המשולש הזה. לכן אם נסתכל על תת הגרף המושרה על-ידי כל הקודקודים להוציא שני הקודקודים האלה, אז סכום הדרגות בו הוא יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}-\frac{4}{3}(k-1)-4$. ביטוי זה גדול מ $\frac{k^2}{2}$ ולכן יש בו שני משולשים כנדרש.

<u>שאלה 35</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר עם מספר זוגי של קודקודים. הוכח: G מכיל תת-גרף פורש $G^{'}=(V,F)$ בו כל הדרגות אי-זוגיות.

<u>**פתרון**</u>:

נסתכל על תת גרף פורש שבו מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית הוא מינימלי מבין כל תתי הגרפים הפורשים. נראה שלא יתכן שמספר זה הוא חיובי. מכיון שסכום דרגות הקודקודים בכל גרף הוא זוגי, אז מספר הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית הוא זוגי ומכיון שכאן יש מספר זוגי של קודקודים, אז מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית הוא גם זוגי. נסתכל על קודקוד שהוא כעת בעל דרגה זוגית. בגרף G יש ממנו מסלול בעל אורך מינימלי מבין המסלולים לקודקודים אחרים שגם להם יש כעת דרגה זוגית. מסלול כזה לא עובר באף קודקוד נוסף מבין אלה. נראה שניתן לצמצם את מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית תוך קבלת תת גרף פורש אחר. בכך נקבל סתירה לכך שמספר זה מקבל ערך מינימלי בתת גרף פורש זה. מבין צלעות המסלול, נצרף לתת הגרף כל צלע שכרגע אינה בתת הגרף ונוריד ממנו כל צלע שכרגע כן נמצאת בו. כעת הדרגות של שני קודקודי הקצה הן אי זוגיות. לגבי כל קודקוד פנימי במסלול, הדרגה שלו נשארה אי זוגית. לכן קבלנו תת גרף פורש אחר שבו מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית נמוך יותר.

<u>שאלה 36</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)
יהי G גרף ללא מסלול עם k צלעות. הוכיחו: $\chi(G) \leq k$.

<u>**פתרון**</u>:
נניח בשלילה שהגרף איננו k–צביע. נסתכל על קבוצת תתי גרפים, כאשר בכל שלב תת הגרף יהיה תת הגרף המושרה על קבוצה חלקית של צמתים שתורכב מהקבוצה של השלב הקודם ובתוספת צומת נוסף. אם הגרף איננו k-צביע אז קיים שלב שבו לראשונה לא ניתן לתת לתת לגרף צביעה חוקית ב k צבעים. נמספר את הצבעים בין 1 ל k. ננסה לתת לצומת שהצטרף את הצבע 1. אם בכך לא קבלנו צביעה חוקית, אז קיימת לצומת קבוצת שכנים שכולם צבועים בצבע 1. ננסה לצבוע את הצמתים האלה בצבע 2. אם גם כך לא קבלנו צביעה חוקית, אז קיימים לקבוצה שכנים שצבועים בצבע 2. נמשיך לנסות כך שבכל שלב נתן לקבוצת הצמתים שאליה הגענו את הצבע העוקב. אם בשום שלב לא הגענו לצביעה חוקית, אז קיים מסלול שמתחיל בצומת החדש וממשיך $k-1$ שלבים של מעברים לטבעי העוקב עד המספר k. זהו מסלול באורך k. לכן אילו הגרף לא היה k צביע, אז היה מסלול באורך k.

<u>שאלה 37</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)
יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר. הוכיחו כי קיים קודקוד $v \in V$ כך שהגרף $G'=G-v$ קשיר.

<u>**פתרון**</u>:
לגרף קשיר קיים עץ פורש. בעץ פורש קיימים עלים. אם נמחק עלה, אז לא נפגע בקשירות של העץ. קבוצת הקשתות המושרה בגרף כולו על קבוצת הצמתים שנותרו מכילה את קבוצת קשתות העץ. לכן לא נפגע בקשירות הגרף.

<u>שאלה 38</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)
יהי G גרף d-רגולרי, $d \geq 2$, עם קשירות קדקודית $k(G)$=1. מיצאו את מספר הצביעה הצלעית $\chi'(G)$.

<u>**פתרון**</u>:
לא ניתן לצבוע גרף d-רגולרי צביעה חוקית בפחות מ d צבעים.
נראה שבמקרה זה ניתן לצבוע את הגרף בצביעה חוקית עם d צבעים. נניח בשלילה שהגרף איננו d-צביע. לגרף קיים תת גרף H מינימלי מבחינת הכלה שהוא קשיר ושאיננו d–צביע (נסתכל על סדרה של תתי גרפים: הסדרה תתחיל בצומת מבודד ובשלבים הראשונים עד השגת קשירות, נוסיף בכל שלב צומת עם קשת שמחברת אותו לקבוצת הצמתים הקיימת, אותה קשת תוכל להיצבע בצבע שעדיין לא יוצג בצומת שאליו מחובר הצומת החדש, לאחר השגת קשירות נמשיך להוסיף קשתות). כל תת גרף חלקי ממש של H הוא d-צביע. ב G קיים צומת v שאם נסיר אותו תפגע הקשירות. מכיון שקבוצת הקשתות של H היא קבוצה חלקית לזו של G אז גם אם נסיר את v מ H אז יווצרו לפחות שני רכיבי קשירות. נסתכל על שני תתי גרפים: הראשון יהיה הגרף המושרה על-ידי צמתי אחד מרכיבי הקשירות האלה בתוספת הצומת v, והאחר יורכב מהגרף המושרה על-ידי יתר צמתי הגרף בתוספת הצומת v. כל אחד מתתי גרפים אלה הוא d-צביע. נסתכל על צביעות שלהם. אם יש צורך, נבצע החלפות של צבעים בתת הגרף הראשון שביניהם, כך שהקשתות שנוגעות בצומת v יקבלו צבעים שונים מהצבעים שנוגעים בצומת v בתת הגרף השני. זה אפשרי מכיון שאין מסלולים בין שתי קבוצות הצמתים שלא עוברים בצומת v. הצבעים שינתנו לקשתות הגרף H יהיו אלה שניתנו בשני תתי הגרפים. קבלנו ש H הוא d-צביע. זו סתירה להנחה.
