
<u>שאלה 1</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי G גרף k-צביע. תהי $P \subseteq V(G)$ קבוצת קודקודים ב- G שבה כל שני קודקודים נמצאים במרחק 4 לפחות זה מזה ב- G. הוכח: לכל k-צביעה c_0 של P בצבעים $\{1,\dots,k\}$ קיימת $(k+1)$-צביעה חוקית c של קודקודי G אשר מזדהה עם c_0 על P.

<u>פתרון</u> :

נתן לכל אחד מהקודקודים ב P את הצבע שלו ב c_0, לכל אחד מהקודקודים שאינם ב P ואינם שכנים של קודקוד ב P את הצבע שלו מצביעה אופטימלית מסוימת c_{opt} שמשתמשת בצבעים עם אותם שמות. בשלב ראשון נתן גם לכל אחד מהקודקודים שאינם ב P, אך הם שכנים של קודקוד ב P, גם כן את הצבע שלו מאותה צביעה אופטימלית c_{opt}. אם בכך יינתן לשכן של קודקוד מ P אותו צבע כמו של הקודקוד עצמו, אז נתקן את הצביעה של אותו שכן. לכל אותם קודקודים שיש להם את אותו צבע כמו לשכנם ב P נתן צבע מיוחד מסוים ששונה מכל צבעי c_{opt}. הודות לחוקיות הצביעה c_{opt}, אין שני שכנים של קודקוד מסוים מ P שיש ביניהם קשת ושניתן להם אותו צבע ובכלל זה הצבע של הצומת השכן שהוא ב P. בגלל שהמרחק בין כל שני קודקודים שב P גדול מ 3, אז אין קשתות בין שכנים של שני קודקודים שונים מ P.

<u>שאלה 2</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

נסמן ב- mK_2 את הזיווג בגודל m. הוכח: $R(mK_2)=3m-1$, כאשר $R(G)$ הוא מספר רמזי של G, שהוא המספר השלם המזערי n עבורו כל 2-צביעה של צלעותיו של הגרף השלם K_n מכילה עותק מונוכרומטי של G. (יש להוכיח גם את החסם התחתון וגם את העליון!)

<u>פתרון</u>:

<u>טענה</u>:

$R(mK_2)\ge 3m-1$

<u>הוכחה</u>:

נסתכל על גרף שבו $3m-2$ קודקודים. נסתכל בו על חלוקה לשתי קבוצות זרות של קודקודים : A בת $m-1$ קודקודים ו B בת $2m-1$ קודקודים. נצבע בכחול את כל הצלעות ששני קצוותיהן הם קודקודים מ B ונצבע בירוק את יתר הצלעות. במצב זה אין זיווג כחול בגודל m ואין זיווג ירוק בגודל m.

<u>טענה</u>:

$R(mK_2)\le 3m-1$

<u>הוכחה</u>:

ההוכחה באינדוקציה. עבור זיווג בגודל 2 ברור שדי ב 2 קודקודים. נניח שעבור זיווג בגודל $k-1$ די ב $3(k-1)-1$ קודקודים. נסתכל על צביעה של גרף בגודל $3k-1$ קודקודים. אם עבור כל קודקוד כל הצלעות שנוגעות בו הן באותו צבע אז כל צלעות הגרף צבועות באותו צבע וברור שיש זיווג כנדרש. אחרת יש קודקוד שבו נוגעות צלעות משני הצבעים השונים. נניח שאלה צלעות vv_1 ו vv_2. על-פי הנחת

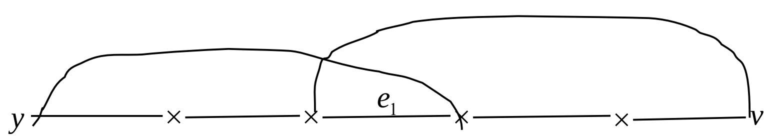
האינדוקציה, בגרף המושרה על הקודקודים שאינם $\{v,v_1,v_2\}$ יש זיווג בגודל $k-1$ באחד הצבעים. יחד עם אחת הצלעות vv_1 או vv_2 נקבל זיווג בגודל k באחד הצבעים.

<u>שאלה 3</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי G גרף על $n \geq 3$ קודקודים מדרגה מזערית לפחות $\frac{n+1}{2}$. הוכח כי כל צלע של G נמצאת על מעגל המילטון ב- G.

<u>פתרון</u>:

נראה שצלע e נמצאת על מעגל. בשלב ראשון נאחד את u ואת v שהם הקצוות של e. אם לקודקוד מסוים היתה קודם צלע לאחד הקודקודים אז עדיין תהיה לו צלע לקודקוד החדש w. אם היו לו לשניהם אז תמשיך להיות לו צלע אחת ל w. לקודקוד w יש כעת דרגה של לפחות מחצית קודקודי הגרף. כל קודקוד אחר איבד לכל היותר צלע אחת ולכן יש לו דרגה של לפחות $\frac{n-1}{2}$ בגרף שבו $n-1$ קודקודים. לכן יש בגרף שהתקבל מעגל המילטון. נסתכל על מעגל כזה. ננסה להפריד בין u ו v ולשמור על המעגל. ל w יש שכנים x ו y. אם יש צלע בין u ל x ובין v ל y או להפך, אז נוכל ליצור מעגל. אחרת נצטרך להסתפק בחיבור u ל x וקבלת מסלול המילטון ששני קצוותיו v ו y. נוכל ליצור ממנו מעגל על-ידי שימוש בתהליך שמשורטט למטה: חיבורים לשני קודקודים שכנים ופתיחת הצלע e_1 שמחברת אותם. נוכל לעשות זאת כי לכל קודקוד יש דרגה של לפחות $\frac{n+1}{2}$ ואין צלע בין v ל y: אם אין צלע e_1 כזאת אז ברור שעבור כל שני קודקודים שכנים לפחות לאחד מהם אין קשר בין v לאחד או בין y לאחר ובסך הכל לפחות לאחד מבין v ו y יש דרגה של לכל היותר $\frac{n}{2}$.



<u>שאלה 4</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

הוכח כי כל גרף G על n קודקודים עם לפחות $2n-2$ צלעות מכיל שני מעגלים עם אורך שווה.

<u>פתרון</u>:

בגרף שבו n קודקודים ו $2n-2$ צלעות, צריך לסלק לפחות $n-1$ צלעות כדי שלא ישארו בו מעגלים. כל סילוק של צלע כזאת מבטל לפחות מעגל אחד. כל מעגל שמתבטל הוא באורך בין 3 ל n. יש סך הכל $n-2$ טבעיים בין 3 ל n. לכן לפי עקרון שובך היונים יש לפחות שני מעגלים בעלי אותו אורך.

<u>שאלה 5</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי G גרף קשיר על $n \geq 2$ קודקודים. עבור זוג u,v של קודקודי G נסמן ב- $dist(u,v)$ את המרחק בין u ל-v ב-G, שהוא המספר המזערי של צלעות במסלול בין u ל-v ב-G. הוכח:

$$\sum_{u \neq v \in V(G)} dist(u,v) \leq \binom{n+1}{3} .$$

<u>פתרון</u>:

<u>טענה</u>: סכום המרחקים מקבל ערך מכסימלי כאשר הגרף הוא עץ.

<u>הסבר</u>: מגרף שאינו עץ ניתן להוריד צלעות מבלי לקצר מסלולים.

<u>טענה</u>:

סכום המרחקים מקבל ערך מכסימלי כאשר העץ הוא שרוך (מסלול אחד באורך $n-1$).

<u>הסבר</u>:

נניח בדרך השלילה שלא כך. במצב כזה קיים בעץ קודקוד w בדרגה של לפחות 3. אם מסירים את הקודקוד w מהעץ אז מתקבלים לפחות שלושה תתי עצים. יהי w_1 שכן של w שמבין שכני w, בתת העץ שלו יש מספר מינימלי של קודקודים מבין תתי העצים. נבחר תת עץ אחר ונתלה אותו על w_1 במקום על w. בכך ישתנו אורכי מסלולים בלכל היותר 1. יותר מסלולים יתארכו ב 1 מאשר יתקצרו ב 1. נקבל סתירה לכך שבעץ שאינו שרוך יכול להתקבל סכום מרחקים מכסימלי.

כעת נראה באינדוקציה שבשרוך באורך $n-1$ סכום אורכי המסלולים הוא לא יותר מ $\binom{n+1}{3}$.

עבור $n=2$ זה מתקיים. נניח שעבור שרוך באורך $k-2$ הסכום הוא לא יותר מ $\binom{k}{3}$ ונראה שעבור מסלול באורך $k-1$ סכום המרחקים הוא לא יותר מ $\binom{k+1}{3}$. סכום המרחקים בין כל זוגות הקודקודים חוץ מאחד משני קצוות השרוך הוא לפי הנחת האידוקציה לא גדול מ $\binom{k}{3}$. סכום המרחקים מהקצה הוא $\frac{(1+(k-1))(k-1)}{2}$. מתקיים $\binom{k}{3} + \frac{(1+(k-1))(k-1)}{2} \leq \binom{k+1}{3}$.

<u>שאלה 6</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי $G=(V,E)$ גרף על n קודקודים, n זוגי, בו $d(u)+d(v) \geq n-1$ לכל זוג קודקודים $u \neq v \in V$. הראה: G מכיל זיווג מושלם.

<u>פתרון</u>:

נוסיף לגרף קודקוד שיחובר לכל יתר הקודקודים. בגרף בן $n+1$ הקודקודים מתקיים עבור כל זוג קודקודים u,v: $d(u)+d(v) \geq n+1$. לכן קיים בגרף מעגל המילטון. אם נוריד מהמעגל הזה את הקודקוד שהוספנו ואת הצלעות הנוגעות בו אז נקבל מסלול המילטון של הגרף המקורי. מסלול זה מכיל זיווג שמרווה את כל הקודקודים.

<u>שאלה 7</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי $G=(V,E)$ גרף על $|V|=1000$ קודקודים עם $|E|=250001$ צלעות. הוכח כי G מכיל שני משולשים החולקים צלע משותפת.

<u>פתרון</u>:

נוכיח באינדוקציה שבכל גרף בעל מספר קודקודים זוגי ובעל דרגה ממוצעת של יותר ממחצית קודקודי הגרף, יש שני משולשים בעלי צלע משותפת. עבור גרף בעל 4 קודקודים הדבר מתקיים.

נניח שבכל גרף בעל k קודקודים וסכום דרגות של יותר מ $\frac{k^2}{2}$ יש בהכרח שני משולשים כנדרש ונרצה להראות שבכל גרף בעל $k+2$ קודקודים וסכום דרגות של יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}$ גם בהכרח יש שני משולשים כנדרש. בגרף בעל $k+2$ קודקודים נסתכל על איזשהו זוג קודקודים המחוברים בצלע. אם אין להם שכן משותף אז יוצאות מהם לכל היותר k צלעות לקודקודים אחרים. בגרף כולו סכום הדרגות הוא יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}$. לכן בתת הגרף המושרה על-ידי יתר הקודקודים סכום הדרגות הוא יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}-2k-2=\frac{k^2}{2}$. לכן על-פי הנחת האינדוקציה יש בתת גרף זה שני משולשים כנדרש.

נתייחס למקרה ששני הקודקודים כן נמצאים על משולש. נסתכל על משולש זה. די למצוא קודקוד נוסף שיש לו צלע ללפחות שניים מקודקודי משולש זה. אם אין קודקוד כזה, אז זה אומר שמשלושת קודקודי המשולש יוצאות לכל היותר $k-1$ צלעות ליתר קודקודי המשולש. לכן קיימים שניים משלושת הקודקודים שיוצאים מהם לא יותר מ $\frac{2}{3}(k-1)$ צלעות לקודקודים שאינם על המשולש הזה. לכן אם נסתכל על תת הגרף המושרה על-ידי כל הקודקודים להוציא שני הקודקודים האלה, אז סכום הדרגות בו הוא יותר מ $\frac{(k+2)^2}{2}-\frac{4}{3}(k-1)-4$. ביטוי זה גדול מ $\frac{k^2}{2}$ ולכן יש בו שני משולשים כנדרש.

<u>שאלה 8</u> (מבחינה של פרופ' מיכאל קריבלביץ)

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר עם מספר זוגי של קודקודים. הוכח: G מכיל תת-גרף פורש $G'=(V,F)$ בו כל הדרגות אי-זוגיות.

<u>פתרון</u>:

נסתכל על תת גרף פורש שבו מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית הוא מינימלי מבין כל תתי הגרפים הפורשים. נראה שלא יתכן שמספר זה הוא חיובי. מכיון שסכום דרגות הקודקודים בכל גרף הוא זוגי, אז מספר הקודקודים בעלי דרגה אי זוגית הוא זוגי ומכיון שכאן יש מספר זוגי של קודקודים, אז מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית הוא גם זוגי. נסתכל על קודקוד שהוא כעת בעל דרגה זוגית. בגרף G יש ממנו מסלול בעל אורך מינימלי מבין המסלולים לקודקודים אחרים שגם להם יש כעת דרגה זוגית. מסלול כזה לא עובר באף קודקוד נוסף מבין אלה. נראה שניתן לצמצם את מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית תוך קבלת תת גרף פורש אחר. בכך נקבל סתירה לכך שמספר זה מקבל ערך מינימלי בתת גרף פורש זה. מבין צלעות המסלול, נצרף לתת הגרף כל צלע שכרגע אינה בתת הגרף ונוריד ממנו כל צלע שכרגע כן נמצאת בו. כעת הדרגות של שני קודקודי הקצה הן אי זוגיות. לגבי כל קודקוד פנימי במסלול, הדרגה שלו נשארה אי זוגית. לכן קבלנו תת גרף פורש אחר שבו מספר הקודקודים בעלי דרגה זוגית נמוך יותר.
