

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשע"ב, מועד

תאריך:

מרצים: פרופ' עמוס פיאט, פרופ' מיכה שריר

מתרגלים: שי ורדי, אדם שפר

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.

במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורפות שלוש מסגרות נוספות, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

| | | |
|--|--|---|
| | | 1 |
| | | 2 |
| | | 3 |
| | | 4 |
| | | 5 |

שאלה 1

סעיף א' (25% מניקוד השאלה)

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת כל הקודקודים בגרף אשר ניתן להגיע מהם בדיוק ל-100 קודקודים נוספים בגרף (ניתן להגיע מקודקוד u אל קודקוד v אם קיים ביניהם מסלול).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב' (75% מניקוד השאלה)

נתון גרף מכוון $G = (V, E)$. תארו אלגוריתם יעיל למציאת כל הקודקודים בגרף אשר ניתן להגיע מהם בדיוק ל-100 קודקודים נוספים בגרף (ניתן להגיע מקודקוד u אל קודקוד v אם קיים מסלול מ- u אל v).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

בעיית Independent set מתוארת באופן הבא: בהנתן גרף לא מכוון $G = (V, E)$, מצאו קבוצה מקסימלית $S \subset V$ של קודקודים, כך שכל קשת ב- E נוגעת בלכל היותר קודקוד אחד מ- S . (i) תארו תוכנית לינארית אשר אם נכריח את המשתנים בה להיות שלמים נקבל את בעיית ה-Independent set. (ii) חשבו את התוכנית הדואלית לה. (iii) תארו (במילים) את הבעיה שהייתה מתקבלת אם היינו מכריחים את המשתנים בתוכנית הדואלית לקבל ערכים שלמים.

תשובה:

שאלה 3

סעיף א' (1/3 מניקוד השאלה)

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G = (V, E)$ אשר מכילה 7 קשתות עם קיבול 1 ועוד 30 קשתות עם קיבול 10, והזרימה המקסימלית בה הינה בגודל 39 (פרט ל37 הקשתות הנתונות, אין קשתות נוספות ברשת).

פתרון:

סעיף ב' (1/3 מניקוד השאלה)

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G = (V, E)$ אשר כל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת מסלול בין המקור לבור שכל הקשתות שבו בעלות קיבול $\sqrt{2}$, והזרימה המקסימלית הינה בגודל 39.

פתרון:

סעיף ג' (1/3 מניקוד השאלה)

הוכיחו או הפריכו: קיימת רשת זרימה $G = (V, E)$ שכל הקיבולים בה הם 1 או $\sqrt{2}$, קיים ברשת חתך (לאו דווקא מינימלי) מהמקור אל הבור שכל הקשתות שלו בעלות קיבול $\sqrt{2}$, והזרימה המקסימלית הינה בגודל 39.

פתרון:

שאלה 4

נתונים בניין עם n קומות ו- m אבטיחים. ידוע שקיים מספר x כלשהו, כך שאם נזרוק אבטיח מקומה x (או מקומה נמוכה ממנה) האבטיח ישרוד את הנפילה, אך אם נזרוק את האבטיח מקומה גבוהה מ- x האבטיח יתנפץ. באבטיח ששרד ניתן להשתמש לזריקות נוספות, אך לא באבטיח שהתנפץ. תארו אלגוריתם יעיל שמוצא, עבור m, n נתונים, את מספר זריקות האבטיחים המינימלי w שנזדקק להן על מנת שבטוח נגלה את הערך x . הניתוח אמור להיות ביחס למקרה הגרוע ביותר. כלומר, עבור כל תוצאה אפשרית שתתקבל מהזריקות שביצענו, נזדקק לכל היותר ל- w זריקות כדי לקבוע מהו x . סדרת הקומות שבהן נשתמש אינה צריכה להיות קבועה מראש – כל קומה יכולה להבחר לאחר שידועות התוצאות של הזריקות הקודמות. רמז: הגדירו את $c[i, j]$ להיות מספר הזריקות המינימלי שנזדקק לו כאשר בבניין יש i קומות ויש לנו j אבטיחים.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

סעיף א' (50% מניקוד השאלה)

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, וזוג קודקודים $s, t \in V$. ידוע שאין ב- G מעגל שלילי. בנוסף, 10 מקשתות הגרף צבועות באדום. תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול קל ביותר מ- s אל t , מבין המסלולים אשר מכילים לפחות חמש קשתות אדומות. מעבר דרך אותה קשת אדומה x פעמים נספר כ- x קשתות אדומות במסלול, ולא כאחת.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

סעיף ב' (50% מניקוד השאלה)

נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל על הקשתות $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, וזוג קודקודים $s, t \in V$. ידוע שאין ב- G מעגל שלילי. בנוסף, 10 מקשתות הגרף צבועות באדום. תארו אלגוריתם יעיל למציאת מסלול קל ביותר מ- s אל t , מבין המסלולים אשר מכילים לפחות חמש קשתות אדומות. מעבר דרך אותה קשת אדומה x פעמים נספר כקשת אדומה אחת, ולא כ- x קשתות אדומות במסלול.

| |
|---------|
| יעילות: |
|---------|

| |
|-----------------|
| אלגוריתם והסבר: |
|-----------------|

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____: