

מבחן באלגוריתמים

סמסטר ב' תשע"ג, מועד א'

תאריך: 10 ביולי 2013

מרצים: פרופ' נוגה אלון, פרופ' רון שמיר

מתרגלים: רני הוד, שי ורדי

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב-90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב-100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

		1
		2
		3
		4
		5

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

1. לכל גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ (ללא משקלים) ולכל עץ פורש T של G יש צומת $s \in V$ כך שאפשר לקבל את T כעץ DFS עם שורש s .

הוכחה/דוגמא נגדית:

2. לכל גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$ (ללא משקלים) ולכל עץ פורש T של G עם שורש $s \in V$ שמהווה עץ מסלולים קצרים ביותר מ- s , אפשר לקבל את T כעץ BFS עם שורש s .

הוכחה/דוגמא נגדית:

שאלה 2

נתון גרף דו־צדדי $G = (A, B, E)$ עם קבוצות צמתים A ו- B כאשר $|A| = |B| = n$, ונתון בו זיווג $M \subseteq E$ בגודל $|M| = n - 2013$.
 תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר שיקבע האם יש ב- G זיווג מושלם (קרי: זיווג בגודל n).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתון מספר טבעי k , גרף מכוון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקל חיובית $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ונתונים זוג צמתים שונים $x, y \in V$.
 תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שימצא את קבוצת כל הקשתות שמשותפות ב- k מק"בים מ- x ל- y ; במילים אחרות, הפלט הוא קבוצת הקשתות $e \in E$ כך שמספר המסלולים השונים מ- x ל- y ממשקל $\delta(x, y)$ שעוברים דרך e הוא לפחות k , כאשר $\delta(x, y)$ הוא משקל המסלול הקל ביותר מ- x ל- y (ביחס ל- w).

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 4

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר עם פונקציית משקל חיובית $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. נאמר שעץ פורש T של G הוא עץ חשמונאי (ביחס ל- w) אם T הוא עץ מסלולים קצרים ביותר מ- s לכל בחירה של $s \in V$. שורש $s \in V$.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות.

1. אם לגרף G יש עפ"מ יחיד (ביחס ל- w), אז יש ל- G עץ חשמונאי (ביחס ל- w).

הוכחה/דוגמא נגדית:

2. אם לגרף G יש עץ חשמונאי (ביחס ל- w) אז יש ל- G עפ"מ יחיד (ביחס ל- w).

הוכחה/דוגמא נגדית:

שאלה 5

עבור מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ווקטור $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ נגדיר את המרחב האפיני $S(A, \bar{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ע"י

$$; S(A, \bar{b}) := \{A\bar{x} + \bar{b} : \bar{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

עבור מספר ממשי $t \geq 1$ נאמר שווקטור $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ הוא t -מאוזן אם מתקיים

$$\max \{y_i\}_{i=1}^n \leq t \cdot \min \{y_i\}_{i=1}^n$$

תארו אלגוריתם מבוסס תכנות לינארי שמקבל את A, \bar{b} ו- t ומחשב וקטור t -מאוזן כלשהו במרחב $S(A, \bar{b})$, אם יש כזה (ואחרת מודיע שאין).

הסבר:

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:

Blank area for the answer.

מס' מחברת: _____

ת.ז.: _____

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____:

