ת.ז.: ________________ מס' מחברת: ______

מבחן באלגוריתמים

סמסטר א' תשע"ג, מועד א'

תאריך: 31 בינואר 2013

מרצה: פרופ' מיכה שריר

מתרגלים: רני הוד, שי ורדי

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר מותר: דף A4 אחד, כתוב משני הצדדים.
במבחן 5 שאלות. יש לענות על כולן.

- תשובות נכונות ומלאות על 4 מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות, ותשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע במסגרת המתאימה. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המסגרות שהוקצו להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- ודאו היטב את תשובתכם לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג מסגרות נוסף, לשימוש במקרי "חירום".
- התשובה לכל שאלה העוסקת באלגוריתם צריכה להיות יעילה ככל האפשר, ומלווה בהסבר מתאים.
- בכל השאלות המתייחסות לגרפים, אם לא מצוין אחרת, הכוונה לגרף פשוט (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות). בנוסף, אם לא מצוין אחרת, כל גרף מיוצג ע"י רשימת שכנויות.

בהצלחה!

1	
2	
3	
4	
5	

שאלה 1

נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$. תארו אלגוריתם יעיל לחישוב קבוצת הצמתים $U \subseteq V$ שנמצאים על איזשהו מעגל פשוט ב-G.
(במילים אחרות, לכל $u \in U$ יש מעגל פשוט כלשהו שעובר דרכו.)

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 2

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ על קבוצת הצמתים $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ עם פונקציית משקל $w:E\to\mathbb{R}$ וידוע שאין ב-G מעגלים שליליים ביחס ל-w. תארו אלגוריתם יעיל שמחשב, לכל $1\le i<j\le n$, את משקל המסלול הקל ביותר $v_i \rightsquigarrow v_j$ מבין המסלולים שלא עוברים באף אחד מבין הצמתים $\{v_{j+1},v_{j+2},\ldots,v_n\}$.
(כמובן שאם לזוג i,j מסוים קבוצת המסלולים הנ"ל ריקה, לא צריך לחשב מסלול זה.)

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 3

נתונה מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו-n נעלמים המוגדרת ע"י מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ווקטור $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$. נאמר שוקטור $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ הוא *פתרון ϵ-מקורב* של המערכת $\left(A, \bar{b}\right)$ אם מתקיים

$$\left\|A\bar{x} - \bar{b}\right\|_\infty \overset{!}{=} \max\left\{\left|\left(A\bar{x} - \bar{b}\right)_i\right|\right\}_{i=1}^m = \epsilon \, .$$

הראו כיצד ניתן להשתמש בתכנות לינארי כדי לחשב פתרון מקורב טוב ביותר (דהיינו, ϵ-מקורב עבור ϵ מינימלי).
(במילים אחרות, אנו רוצים שהסטייה המקסימלית של רכיבי $A\bar{x}$ מאיברי $\bar{b}$ המתאימים תהיה קטנה ככל האפשר.)

הסבר:

שאלה 4

נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם קיבולים $c:E\to\mathbb{R}^+$, מקור s ובור t. תארו אלגוריתם יעיל שמחשב, בהנתן זוג קשתות $e_1,e_2\in E$, האם קיים חתך מינימלי ברשת שמכיל בדיוק אחת משתי הקשתות e_1,e_2.

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

שאלה 5

לקראת הבחירות בדמוקרטיה קטנה במערב התיכון, מתכנסים המועמדים של שתי הרשימות "אחדות־משכננו" ו"התעסוקה" לצילום משותף. כל רשימה מורכבת מ-n מועמדים, נסמנם $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ו-$b_1, b_2, \ldots, b_n$ בהתאמה (a_1 הבכיר ביותר ו-a_n הזוטר ביותר; כך גם ברשימה השנייה). בתמונה יעמדו $2n$ המועמדים בשורה אחת, ויש לקבוע את הסדר שלהם בכפוף להנחיות הבאות:

- על־פי התקנון של מפלגת "אחדות־משכננו", אסור לפרסם תמונה בה מועמד עומד מימין למועמד בכיר ממנו (כלומר, a_1 צריך לעמוד הכי מימין ו-a_n הכי משמאל מבין $a_1, \ldots, a_n$);
- על־פי התקנון של מפלגת "התעסוקה", אסור לפרסם תמונה בה מועמד עומד משמאל למועמד בכיר ממנו (כלומר, b_1 צריכה לעמוד הכי משמאל ו-b_n הכי מימין מבין $b_1, \ldots, b_n$);
- לכל זוג סדור של מועמדים x, y (לאו דווקא ממפלגות שונות) נתון סקר דעת קהל, הקובע שאם x עומד בתמונה מייד לשמאלו של y אז $L(x, y)$ אנשים יעשו לה like בפייסבוק. במילים אחרות, עבור סדר $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ של המועמדים יתקבלו בסה"כ

$$L(c_1, c_2) + L(c_2, c_3) + \cdots + L(c_{2n-1}, c_{2n})$$

לייקים. הטבלה L נתונה מראש.

תארו אלגוריתם יעיל שמחשב את סדר המועמדים כך שהתמונה תקבל מספר מירבי של לייקים.

הערה: בהסתכלות על L כמטריצה $2n \times 2n$, שימו לב שאין משמעות לערכי האלכסון; יתרה מזאת, אם נפרק את L לארבעה בלוקים בגודל $n \times n$ כ"א $L = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} \\ L_{ba} & L_{bb} \end{bmatrix}$ אז אין משמעות לערכים מעל האלכסון של L_{aa} (ובהתאמה, מתחת לאלכסון של L_{bb}) בגלל תקנוני המפלגות.

דוגמא: עבור $n = 2$ והקלט $L = \begin{bmatrix} \star & \star & 2 & 8 \\ 6 & \star & 1 & 9 \\ 4 & 3 & \star & 7 \\ 0 & 5 & \star & \star \end{bmatrix}$ יש $\binom{4}{2} = 6$ אופציות:

$$a_2, a_1, b_1, b_2 \to 6 + 2 + 7$$
$$a_2, b_1, a_1, b_2 \to 1 + 4 + 8$$
$$b_1, a_2, a_1, b_2 \to 3 + 6 + 8$$
$$a_2, b_1, b_2, a_1 \to 1 + 7 + 0$$
$$b_1, a_2, b_2, a_1 \to 3 + 9 + 0$$
$$b_1, b_2, a_2, a_1 \to 7 + 5 + 6$$

והאופטימלית מביניהן היא האחרונה (עם 18 לייקים).

שאלה 5 (המשך)

יעילות:

אלגוריתם והסבר:

מס' מחברת: ______ ת.ז.: ________________

מסגרת "חירום" לשאלה מספר ______, סעיף ______:

מסגרת "חירום" לשאלה מספר _____, סעיף _____: