פתרונות לשאלות מבחינות בחדו"א 1ב

שלומי

פתרונות רבים בקורסים נוספים מופיעים

באתר שלי

www.shlomiru.com

www.shlomir.com

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

כמה שורשים יש למשוואה $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2=\frac{1}{8}$?
כמה מהם חיוביים? האם יש שורש x_0 ש- $|x_0|>1$?

פתרון

נגדיר פונקציה $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x^2-\frac{1}{8}$
למשוואה יש שורשים בדיוק בנקודות שבהן $g(x)$ מתאפסת. $g(x)$ רציפה וגזירה. מתקיים:
$$g'(x)=x^3-2x^2+2x=x(x^2-2x+2)=x((x-1)^2+1)$$
מכיון ש $(x-1)^2+1$ תמיד חיובי, אז הפונקציה מונוטונית עולה עבור $x>0$ ומונוטונית יורדת עבור $x<0$. לכן הפונקציה מתאפסת לכל היותר נקודה חיובית אחת ולכל היותר נקודה שלילית אחת.
מתקיים $g(0)<0$, $g(1)>0$, $g(-1)>0$.
לכן לפונקציה יש ערכי ביניים $0<x_1<1$, $-1<x_2<0$ שעבורם $g(x_1)=0$, $g(x_2)=0$.
לכן אין שורשים ימינה ל 1 ושמאלה ל -1.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) $(0<a<b)$ המקיימת $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{f(b)}{f(a)}$ הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=-\frac{c}{2}f'(c)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר בקטע $[a,b]$ פונקציה g: $g(x)=x^2\cdot f(x)$.

הפונקציה g היא רציפה וגזירה בקטע הפתוח (במכפלה של פונקציות רציפות וגזירות).

על-פי הנתון מתקיים $g(a)=g(b)$.

על-פי משפט רול (או לגרנז') קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $g'(c)=0$.

g' מתקיים $g'(x)=2\cdot x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)$.

מכיון ש $c>0$ אז לנקודה c מתקיים $2f(c)=-cf'(c)$ ומתקיימת הדרישה.

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

חשבו את האינטגרל (אם קיים)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$$

<u>פתרון:</u>

נציב $t=\cos x$, $dt=-\sin x\cdot dx$

$x=0\Longrightarrow t=1$, $x=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow t=0$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx=-\int_1^0\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}}=\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\,dt=3t^{\frac{1}{3}}\Big]_0^1=3$$

שלומי

שאלה: (מבחינה של פרופ' שצ'רדק)

נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה גזירה ושלילית לכל x.
הוכיחו: x_0 נקודת קיצון מקומי של $f(x)$ אם ורק אם x_0 נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)=\int_0^x f^2(t)\,dt$
האם ל- $g(x)$ נקודת קיצון מקומי או מוחלט?

פתרון:

מכיון ש $f(x)$ רציפה אז $g(x)$ רציפה וגזירה לכל x ומתקיים $g'(x)=f^2(x)$, מכיון ש $f(x)$ גזירה אז מתקיים $g''(x)=2f(x)\cdot f'(x)$. בנקודת פיתול של הפונקציה g, הסימן של g'' מתחלף ומכיון ש $f(x)<0$ לכל x אז גם הסימן של f' מתחלף, לכן זו נקודת קיצון מקומי.
בכיוון השני: f' מחליפה סימן בנקודה x_0 אז מכיון ש f תמיד אי שלילית אז גם g'' מחליפה סימן בנקודה x_0 לכן x_0 היא נקודת פיתול.
מכיון ש $f^2(x)>0$ לכל x אז $g(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה, מתקיים $g(0)=0$ ואין לה נקודות קיצון בתוך התחום.

שאלה: (מבחינה של פרופ' שצ'רדק)

חשבו $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{3n-3}$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{3n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{5n-3}\right)^{5n-3}\right)^{\frac{3n-3}{5n-3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-1}\right)^{\frac{3n-3}{5n-3}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\frac{3}{5}(5n-3)-\frac{2}{5}\cdot 3}{5n-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{3}{5}}\cdot e^{\frac{-\frac{6}{5}}{5n-3}}=e^{-\frac{3}{5}}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

עבור אילו ערכי a, b תהי הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x-x}{x^3} & x\neq 0\\ b & x=0\end{cases}$$

רציפה ב-0?

פתרון

צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=b$.

בפונקציה $\dfrac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x-x}{x^3}$, כאשר $x\to 0$ הגבול של המונה וגם של המכנה הוא 0. המונה וגם המכנה הם פונקציות גזירות מכל סדר. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+b\cdot\cos x)\cdot\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\sin x+0.5b\cdot\sin 2x-x}{x^3}=$$

$$\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\cos x+b\cdot\cos 2x-1}{3x^2}$$

צריך להתקיים $\lim\limits_{x\to 0} a\cdot\cos x+b\cdot\cos 2x-1=0$ וזה קורה אם $a+b=1$.

אם זה קורה אז נמשיך להשתמש בכלל של לופיטל עוד פעם: נקבל שהגבול של המנה הוא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\cdot\sin x-2b\cdot\sin 2x}{6x}$$

צריך להתקיים שהגבול של המונה כאשר $x\to 0$ הוא 0, זה קורה עבור כל a,b קבועים. נשתמש בכלל של לופיטל עוד פעם. הגבול של המנה שווה ל $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a\cdot\cos x-4b\cdot\cos 2x}{6}$

צריך להתקיים $b=-\dfrac{(a+4b)}{6}$ בנוסף ל $a+b=1$ שראינו קודם.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

תהי $f(x)$ מוגדרת בסביבה של a וגזירה בנקודה a.
כמו כן $f(a)>0$. חשבו
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$$

פתרון

מכיוון ש f גזירה בנקודה a אז מתקיים
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=f'(a)$$
עבור כל $s>f'(a)$! $0<t<f'(a)$ קיים N טבעי כך שעבור כל $n>N$:
$$t<\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}<s$$

ועבור כל $n>N$ מתקיים
$$\left(1+\frac{t}{n\cdot f(a)}\right)^n=\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}t}{f(a)}\right)^n\le\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n\le$$
$$\le\left(\frac{f(a)+\frac{1}{n}s}{f(a)}\right)^n=\left(1+\frac{s}{n\cdot f(a)}\right)^n$$

לגבי כל $t<f'(a)<s$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n\cdot f(a)}\right)^n=e^{\frac{t}{f(a)}},\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n\cdot f(a)}\right)^n=e^{\frac{s}{f(a)}}$$
לכן קיים הגבול
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

תהי $f(x)$ רציפה ב $[0,1]$ כך ש $f(x)\in[0,1]$.
הוכח שעבור כל n טבעי יש למשוואה $x^n=f(x)$ פתרון ב $[0,1]$.

פתרון

עבור n נתון נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-x^n$.
מתקיים $g(0)=f(0)-0^n\geq 0$, $g(1)=f(1)-1^n\leq 0$.
$g(x)$ רציפה בקטע כהפרש של שתי פונקציות רציפות. לכן עבור כל $g(1)\leq d\leq g(0)$ קיימת נקודה c כך ש $0\leq c\leq 1$, $g(c)=d$!
בפרט קיימת נקודה c_0 שבה $g(c_0)=0$.
בנקודה זו מתקיים $f(c_0)-c_0^n=0$
כך ניתן למצוא פתרון כזה עבור כל n נתון.

שאלה (מבחינה של פרופ' סיגשינסקי)

חשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}\,dt$

פתרון

ננסה את מזלנו ונבדוק אם קיים הגבול של $f(t)=(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}$ כאשר $t\to 0$. נחשב את הגבול של $\ln f(t)$.

$$\lim_{t\to 0}\ln\left((\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos t+\sin t)}{t}$$

המונה והמכנה שואפים ל 0 כאשר $t\to 0$. שניהם גזירים בסביבת $t=0$ לכן ניתן להשתמש בכלל לופיטל

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(t)+\sin(t))}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{-\sin(t)+\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}}{1}=1$$

לכן $\lim_{t\to 0}f(t)=e$. עבור כל $a>e$, $e>b$ מתקיים

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x b\,dt\leq\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x a\,dt=a$$

לכן הגבול הוא e.

שלומי

__שאלה__ (מבחינה של פרופ' אדמוביץ' ופרופ' סיגשינסקי)

חשב
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$$

__פתרון__

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

הוא סכום של n מחוברים שכל אחד מהם

הנו קטן מ $\sqrt{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}$ וגדול מ $\frac{1}{n+0.5}$

(הסבר קריטי: $(n+0.5)^2=n^2+n+0.25>n^2+n$)

לכן $\frac{n}{n+0.5}<a_n<\frac{n}{n}$

מכיון שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+0.5}=1$

אז קיים $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אברמוביץ' ופרופ' סיבשינסקי)

חשב $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

פתרון

נחשב $\lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)$

אם קיים לוגריתם זה גבול אז לפי אריתמטיקה של גבולות נוכל למצוא את הגבול המקורי.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$$

מתקיים $\lim_{x\to 0}x^2=0$ וגם $\lim_{x\to 0}\ln\cos x=0$

שתי הפונקציות הן גזירות מכל סדר בסביבה של הנקודה $x=0$. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים עד שהמונה או המכנה יתאפס.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{2}=-\frac{1}{2}$$

לכן מתקיים $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-0.5}$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלוסקין ופרופ' סלוצ'נסקי)

הוכח כי אם $a_0, a_1, \dots, a_p$ מק"מ $a_0+a_1+\dots+a_p=0$ אז

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_p\sqrt{n+p}\right)=0$$

פתרון

שים לב שעבור כל $k\geq 1$ מתקיים $\sqrt{n+k}<\sqrt{n}+\frac{k}{\sqrt{n}}$ (ההוכחה באמצעות העלאת שני האגפים בריבוע).

לכן:

$$a_0\cdot\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\dots+a_p\cdot\sqrt{n+p}<$$

$$< a_0\cdot\sqrt{n}+a_1\left(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\dots+a_p\cdot\left(\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\left[a_0\sqrt{n}+a_1\cdot\sqrt{n}+\dots+a_p\cdot\sqrt{n}\right]+$$

$$+a_1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+a_2\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}+\dots+a_p\cdot\frac{p}{\sqrt{n}}$$

עפ"י הנתון הסוגריים המרובעים מסתכמים ב-0. סכום יתר האיברים הוא לא יותר מ: $\frac{\sum_{i=0}^{p} a_i\cdot p}{\sqrt{n}}$.

מכיוון ש-a_i ו-p הם קבועים אז מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum a_i\cdot p}{n}=0$ והגבול הוא 0 כנדרש.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אדרמוביץ' ופרופ' סובשינסקי)

הוכח או הפרך את הטענה הבאה: אם עבור כל x ממשי מתקיים האי שוויון $f(x) < g(x)$ והפונקציות f ו-g גזירות אז מתקיים אי השוויון $f'(x) < g'(x)$

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.

נגדיר

$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ עבור $-\infty < x < +\infty$

$g(x) = 1$ עבור $-\infty < x < +\infty$

עבור כל $-\infty < x < +\infty$ מתקיים $f(x) < 1$. שתי הפונקציות הן גזירות בכל נקודה על הישר.

מתקיים $g'(x) = 0$ עבור כל $-\infty < x < +\infty$

אך $f(x)$ היא פונקציה גזירה עולה עבור $0 < x$

ולכן עבור כל $0 < x$ מתקיים $f'(x) > 0$.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סודין)

חשב $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}}$

<u>פתרון</u>

עבור כל k קבוע

$$\frac{2^k+3^k}{2^{k+1}+3^{k+1}} = \frac{2^k\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)}{2^k\left(2+\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3\right)}$$

עבור כל k טבעי קבוע ביטוי זה גדול מ $\frac{\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\frac{2}{3}\cdot 3+\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3}=\frac{1}{3}$ וקטן מ $\frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^k}{\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot 3}$

לביטוי זה יש גבול $\frac{1}{3}$ כאשר $k\to\infty$. לכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא $\frac{1}{3}$.

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סודין)

חשב $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{2^k+3^k}$

<u>פתרון</u>

עבור כל k קבוע

$$3=\sqrt[k]{3^k}<\sqrt[k]{2^k+3^k}<\sqrt[k]{2\cdot 3^k}=\sqrt[k]{2}\cdot 3$$

כאשר k שואף לאינסוף שני האגפים שואפים ל 3.
לכן לפי משפט הסנדוויץ' הגבול הוא 3.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' פיבשינסקי)

מצאו $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3}+x$

פתרון

עבור כל $x<0$ מתקיים $\sqrt[3]{1-x^3} > -x$

ולכן עבור כל $x<0$ $\sqrt[3]{1-x^3}+x > 0$

עבור למשל כל $x<-8$ מתקיים $\sqrt[3]{1-x^3} < -x-\frac{1}{x}$

(הבהרה: אם מעלים את שני האגפים שהם חיוביים בשלישית אז רואים זאת)

לכן מתקיים עבור כל $x<-8$

$$-\frac{1}{x} > \sqrt[3]{1-x^3}+x > 0$$

מכיוון שכאשר $x\to-\infty$ שני האגפים שואפים ל 0, אז לפי משפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול הוא 0.

שאלה (מבחינה של פרופ' פיבשינסקי)

הוכח כי למשוואה $y=x^5+ax^3+b$ $(a,b>0)$ שורש ממשי יחיד.

פתרון

מתקיים $\lim_{x\to+\infty} x^5+ax^3+b=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^5+ax^3+b=-\infty$

והפונקציה היא רציפה. לכן קיימת נקודת ביניים בה היא מתאפסת.

מתקיים $y'=5x^4+3ax^2>0$ לכל x. לכן הפונקציה לא יכולה להתאפס ביותר מנקודה אחת.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' לוין ופרופ' סודין באינפ' לפיזיקאים)

מצא את סימן האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

<u>פתרון</u>

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin(2\pi - x)}{2\pi - x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x} \right) dx$$

בכל נקודה $0 \le x \le \pi$ מתקיים $\sin x \ge 0$ ובכל נקודה $0 \le x < \pi$ מתקיים $\frac{1}{x} - \frac{1}{2\pi - x} > 0$ כאשר $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi - \pi} = 0$. לכן זהו אינטגרל של פונקציה אי שלילית שהיא חיובית ממש בקטע שלם, לכן האינטגרל הוא חיובי.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' גלצר ופרופ' שנירלמן)

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{6}$ כאשר

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$

(רמז: אינטגרל מסוים)

פתרון

מתוקן

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{4n^2-k^2}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

ביטוי זה הינו סכום חלוקה תחתון של האינטגרל $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ כאן גודל קטעי החלוקה שואף לאפס,

לכן הגבול הוא האינטגרל: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$

נציב $t = \frac{x}{2}$, $dt = \frac{dx}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \int_0^{0.5} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big]_0^{0.5} = \frac{\pi}{6}$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סיבג'נסקי)

הוכח כי אם $a_1+\frac{1}{2}a_2+\dots+\frac{1}{n}a_n=0$ אזי למשוואה $a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}=0$ יש שורש בקטע $0\le x\le 1$.

פתרון

נסתכל על הפונקציה $f(x)=a_1+a_2x+\dots+a_n x^{n-1}$.
זו פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$. לכן היא מקבלת בקטע ערך מכסימלי בנקודה x_1 וערך מינימלי בנקודה x_2.

פונקציה רציפה בקטע סגור, זו פונקציה אינטגרבילית.
אילו היה מתקיים $f(x_1)<0$ אזי היה מתקיים
$$\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 f(x_1)\,dx = f(x_1)<0$$

אך נתון $\int_0^1 f(x)\,dx = a_1+\frac{1}{2}a_2+\dots+\frac{1}{n}a_n=0$

לכן $f(x_1)\ge 0$. משיקולים דומים נקבל $f(x_2)\le 0$.

לכן מכיון שהפונקציה רציפה אזי קיימת בקטע הסגור שבין x_1 ל- x_2 נקודה x_3 שבה $f(x_3)=0$.

שלומי

שאלה חשבוני (מבחינה של פרופ' סלכן)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$$

פתרון

הפונקציות $e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x$ ו- $\sin^2 x$ שואפות ל- 0 כאשר $x\to 0$! והן גזירות מכל סדר ולכן נוכל להפעיל את כלל לופיטל מספר פעמים עד שהמונה או המכנה לא יתאפסו בנקודה 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}-\sin x-x\cos x+\sin x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}-x\cdot\cos x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}-\cos x+x\cdot\sin x}{2\cdot\cos 2x}=$$

$$=\frac{2\cdot e^0-\cos 0}{2\cdot\cos 0}=0.5$$

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח או הפרך.

יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון שעבור כל $\varepsilon>0$ קיים מספר טבעי N כך שעבור כל מספר טבעי $n>N$ מתקיים $|x_n-y_n|<\varepsilon$

אזי קיים מספר $a\in R$ כך ש $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=a$.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.

נגדיר שתי סדרות: לכל n $x_n=y_n=n$

כך לכל n $x_n-y_n=0$ אך קיים $\lim x_n=\infty$.

אם נרצה שגם לא תהיה התכנסות ל ∞

אז נבחר סדרות אחרות: $x_n=y_n=(-1)^n\cdot n$.

במקרה זה גם $x_n-y_n=0$ אך לא קיים גבול לסדרות וגם אין גבול $+\infty$ או $-\infty$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח שלמשוואה $x^2 = x\sin x + \cos x$ יש בדיוק שני שורשים ב R.

פתרון

נגדיר פונקציה $g(x) = x^2 - x\cdot\sin x - \cos x$

$g(x)$ היא פונקציה רציפה וגזירה ב R כסכום של פונקציות רציפות וגזירות.

$g'(x) = 2x - \sin x - x\cdot\cos x + \sin x = 2x - x\cdot\cos x = x(2-\cos x)$

$2-\cos x$ תמיד גדול מ 0. לכן $g'(x)<0$ עבור $x<0$; $g'(x)>0$ עבור $x>0$

מתקיים: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$g(0)<0$

מכיון שהפונקציה רציפה עבור $0>x$ ומכיון ש 0 הפעל ערך ביניים אז קיימת נקודה $c<0$ כך ש $\infty > g(c) = 0 > g(0)$. מכיון ש g בעלת נגזרת שלילית עבור $x<0$ אז עבור $c_1<c_2<0$ מתקיים $g(c_1) > g(c_2)$ $g(c_2) = g(c_1) + (c_2-c_1)\cdot g'(c_3)$ כאשר c_3 איזשהי נקודה המקיימת $c_1 \le c_3 \le c_2$ לכן יש רק נקודה יחידה c ; $c<0$ שבה $g(c)=0$. בנקודה שבה g מתאפסת ורק בנקודה כזאת יש פתרון למשוואה.

משיקולים דומים נקבל שקיים גם רק פתרון חיובי אחד.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

הוכח/י או הפרך/י: פונקציה חסומה ב- $[a,b]$ היא אינטגרבילית.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית. נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ רציונלי} \\ 0 & x \text{ אי רציונלי}\end{cases}$$

בכל קטע באורך חיובי קיימים גם רציונלים וגם אי רציונלים. לכן בכל חלוקה של הקטע יש בכל תת קטע גם נקודה שבה $f(x)=1$ וגם נקודה שבה $f(x)=0$. לכן הסכום העליון שוה לכל חלוקה ל- $b-a$ והסכום התחתון שוה לכל חלוקה ל- 0. לכן אין סדרת חלוקות שבהן ההפרש בין שני הסכומים שואף ל- 0. לכן הפונקציה לא אינטגרבילית.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' מכן)

נתון $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ חשב $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-ax^2}dx$

פתרון

נשתמש באינטגרציה בחלקים

נגזרת $V=x$, $V'=1$

$u'=x\cdot e^{-ax^2}$

נחשב $\int x\cdot e^{-ax^2}dx$. נציב $x^2=t$, $2xdx=dt$

ונקבל $\int x\cdot e^{-ax^2}dx=\int \frac{1}{2}\cdot e^{-at}dt=$

$$=-\frac{1}{2a}\cdot e^{-at}=-\frac{1}{2a}\cdot e^{-ax^2}$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot x\cdot e^{-ax^2}dx=\left[x\cdot\frac{-1}{2a}e^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2a}\cdot e^{-ax^2}dx\overset{*}{=}\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

* מתקיים

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{-1}{2a}\cdot e^{-ax^2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{-1}{2a}\cdot e^{-ax^2}=0$$

עבור כל a שעבורו האינטגרל הנתון הוא סופי.

אם $a\leq 0$ אז $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ אינו סופי.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סולן)

יהיו $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות.

נתון $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a \in [c,d]$

וכמו כן $x_n \neq y_n \quad \forall n \in N$

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- $[c,d]$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$$

פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.

הרעיון הוא שבנתונים אלה הנגזרת לא חייבת להיות רציפה.

נגדיר פונקציה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x^{1.5}\cdot \sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \end{cases}$$

מתקיים $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{1.5}\cdot \sin\frac{1}{x^2}-0}{x}=0$

נגזור את הפונקציה בנקודה $x\neq 0$ ונקבל

$$f'(x)=1.5\cdot x^{0.5}\cdot \sin\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\cdot \cos\frac{1}{x^2}\cdot x^{1.5}$$

ולנגזרת אין גבול כאשר $x\to 0$

ניתן ממש דוגמא לשתי סדרות ששואפות ל- 0 ושעליהן הגבול המבוקש לא שואף ל- 0.

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \qquad y_n=\frac{1}{\sqrt{(2n+\frac{1}{2})\pi}}$$

שלומי

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right|=$$

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right)^{1.5}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)^{1.5}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}}\right|$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right)^{1.5}\cdot 1-0}{\frac{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{(2n+0.5)\pi}}{\sqrt{(2n+0.5)\pi}\cdot\sqrt{2n\pi}}}\right|\geq$$

$$\geq\lim_{h\to\infty}\left|\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1.5}\cdot n\cdot\frac{1}{\sqrt{2n\pi}-\sqrt{(2n+0.5)\pi}}\right|=$$

$$\lim_{h\to\infty}\left|\frac{1}{100}\cdot n^{0.25}\cdot\frac{\left(\sqrt{2n\pi}+\sqrt{(2n+0.5)\pi}\right)}{2n\pi-(2n+0.5)\pi}\right|=\infty$$

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סודין באינפי לפיסיקאים)

נניח כי $f(x)$ רציפה ב $[0,\infty)$ וכי קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$

סופי. הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה.

<u>פתרון</u>

מכיון שיש לפונקציה גבול a סופי כאשר $x\to\infty$ אז עבור כל $\varepsilon>0$ קיים N כך שעבור כל $x>N$ מתקיים $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן לפי אי שיוויון המשולש קיים עבור כל $x_1,x_2>N$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$!

מכיון שהפונקציה רציפה בקטע $[0,N+1]$ אז עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שעבור כל $0\le x_3,x_4\le N+1$ המקיימים $|x_3-x_4|<\delta_1$ קיים $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.

נבחר $\delta=\min\{\delta_1,1\}$ אז עבור כל $0\le x_5,x_6<\infty$ המקיימים $|x_5-x_6|<\delta$ קיים $|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$.

הסבר: אם מתקיים $x_5>N$, $x_6>N$ אז כבר ראינו זאת. אם אחד מבין x_5 ו x_6 קטן מ N אז השני שביניהם לא גדול מ $N+1$ (כי $\delta\le 1$) ולכן גם ראינו זאת כי $|x_5-x_6|<\delta_1$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' בן ארצי באוני' לפסיכולוגים)
לקבוע האם הפונקציה $\sin\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$ רציפה במידה שווה ב- $(-\infty,+\infty)$ והוכח את התשובה.

פתרון
נגזור את הפונקציה ונקבל נגזרת

$$\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sin\sqrt[3]{x}+\cos\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{x}$$

עבור $x>1$ (או עבור כל קבוע חיובי) הנגזרת חסומה.
לכן עבור כל $x_1,x_2\ge 1$ מתקיים
$f(x_1)-f(x_2)=f'(x_3)(x_1-x_2)$ כאשר x_3 הוא נקודה בין x_1 ו- x_2.
עבור $\varepsilon>0$ נבחר $\delta_1=\frac{\varepsilon}{M}$ כאשר M הוא חסם עליון על הנגזרת בקטע $(1,\infty)$. כך עבור $|x_1-x_2|\le\delta_1$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\le\varepsilon$.
הפונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ ולכן היא רציפה בו במידה שווה. נוכל לבחור δ_2 כך שאם $0\le x_3,x_4\le 2$, $|x_3-x_4|<\delta_2$ אז $|f(x_3)-f(x_4)|<\varepsilon$.

נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$ ואז עבור x_5,x_6, $|x_5-x_6|<\delta$ מתקיים או ש- $x_5,x_6\ge 1$ ו- $|x_5-x_6|<\delta_1$ או ש- $x_5,x_6\le 2$ ו- $|x_5-x_6|<\delta_2$. בכל אחד מהמקרים הללו $|f(x_5)-f(x_6)|<\varepsilon$.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אדרמוליל ופרופ' סיבשינסקי)

נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\cdot \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

כאשר $g(0)=g'(0)=0$.
הוכח שהפונקציה גזירה בראשית.

פתרון

לפי הגדרת הנגזרת אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}$ אז הפונקציה גזירה ב-0.

כאן מתקיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x-0}$$

מכיון שהפונקציה g גזירה ב-0 והנגזרת שווה ל-0 אזי עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור כל $|x|\le\delta$ מתקיים $-|\varepsilon x|\le g(x)\le|\varepsilon x|$.

מכיון שעבור כל $x\neq 0$ מתקיים $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ לכן מתקיים עבור כל x ש-$|x|\le\delta$:

$$\left|\frac{g(x)\cdot\sin\frac{1}{x}}{x-0}\right|\le\left|\frac{\varepsilon x}{x}\right|$$

ומתקיים $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-0}{x-0}\right|\le\varepsilon$ עבור כל $\varepsilon>0$. לכן קיימת בנקודה 0 נגזרת והיא שווה ל-0.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אהרמוביץ' ופרופ' סודבסקי)

הוכח שלא קיימות שתי פונקציות f, g גזירות בקטע $I=(-1,1)$ כך ש $f(0)=g(0)=0$ ו $f(x)\cdot g(x)=x$.

פתרון

נניח בשלילה שקיימות פונקציות גזירות כאלה בקטע. במקרה זה, לפי נוסחת חישוב הנגזרת של מכפלת פונקציות נקבל

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

אך $f(x)\cdot g(x)=x$, לכן מתקיים לכל x בקטע

$$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=1$$

בפרט עבור $x=0$: $f'(0)\cdot g(0)+f(0)\cdot g'(0)=1$

אך נתון $f(0)=g(0)=0$ ולכן לא יתכן שתתקיים הזהות הנ"ל עבור $f'(0)$ ו- $g'(0)$ נתונים סופיים.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סוכן)

חשב/י $\lim_{\beta\to\infty}\int_0^1 x\cdot e^{\beta(x-1)}dx$

פתרון

נחשב עבור β קבוע את $\int_0^1 e^{\beta(x-1)}dx$

נשתמש באינטגרציה בחלקים.

$u=x$, $u'=1$

$v'=e^{\beta(x-1)}$; $v=\frac{1}{\beta}e^{\beta(x-1)}$

$$\int_0^1 x\cdot e^{\beta(x-1)}dx=\left[x\cdot\frac{1}{\beta}\cdot e^{\beta(x-1)}\right]_0^1$$

$$-\int_0^1\frac{1}{\beta}\cdot e^{\beta(x-1)}dx=\frac{1}{\beta}\cdot e^0-0$$

$$-\left[\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{\beta(x-1)}\right]_0^1=\frac{1}{\beta}-\left(\frac{1}{\beta^2}\cdot 1-\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{-\beta}\right)$$

כאשר $\beta\to\infty$ אז $\frac{1}{\beta}$ שואף ל $\frac{1}{\beta^2}$

שואף ל 0 ! $\frac{1}{\beta^2}\cdot e^{-\beta}$ שואף לאפס.

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' סובן)

חשבו $\lim_{B\to\infty}\int_0^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx$

פתרון (פתרון דדיק נוספת)

עבור כל $B>0$ מתקיים:

$$\int_0^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx=\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} x\cdot e^{B(x-1)}dx+\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 x\cdot e^{B(x-1)}dx$$

שני האינטגרלים הם אי שליליים.

עבור כל $0\le x\le 1$ מתקיים $x\cdot e^{B(x-1)}\le e^{B(x-1)}$

לכן האינטגרל הראשון אינו גדול מ (למעשה קטן מ:) $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{B(x-1)}dx$.

$e^{B(x-1)}$ היא פונקציה מונוטונית עולה בקטע, לכן האינטגרל קטן מ: $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{B\left(1-\frac{1}{\sqrt{B}}-1\right)}dx$ ששווה ל $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{B}}} e^{-\sqrt{B}}dx$ שקטן מ $\int_0^1 e^{-\sqrt{B}}dx$ ששווה ל $e^{-\sqrt{B}}$.

אך מתקיים $\lim_{B\to\infty} e^{-\sqrt{B}}=0$.

לגבי האינטגרל השני: מתקיים עבור $x\le 1$: $e^{B-1}\le 1$ לכן האינטגרל קטן מ: $\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 x\,dx$ שקטן מ: $\int_{1-\frac{1}{\sqrt{B}}}^1 1\,dx$ ששווה ל: $\frac{1}{\sqrt{B}}$.

אך $\lim_{B\to\infty}\frac{1}{\sqrt{B}}=0$ לכן האינטגרל שואף ל 0.

לכן האינטגרל כולו שואף ל 0 כאשר $B\to\infty$.

פתרונות מקוצרים באינפי 1

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שצ'רבק)

הראו כי הפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ מקבלת כל ערך ממשי

<u>פתרון</u>

הפונקציה $f(x)$ היא מכפלה של שתי פונקציות רציפות על כל הישר. לכן היא פונקציה רציפה על כל הישר. לפי משפט ערך הביניים, אם בנקודה מסוימת מתקבל ערך b ובנקודה אחרת מתקבל ערך a, אז בקטע שבין שתי הנקודות מתקבלים כל הערכים שבין a ל b. נסתכל על ערך ממשי כלשהו d ונראה שהוא מתקבל באיזשהי נקודה. עבור כל ערך d קיימת נקודה x, $|d|<x$ שבה $\sin x=1$ וקיימת נקודה y, $|d|<y$ שבה $\sin y=-1$. בנקודות אלה מתקיים $|d|<x\cdot\sin x$ ו $-|d|>y\cdot\sin y$. לכן קיימת נקודה z שבין x ל y שבה $z\cdot\sin z=d$.

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' לנר)

חשב $\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}$

<u>פתרון</u>

נציב $t=\sqrt{e^x}$:

$$dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^x}}\cdot e^x dx=\frac{\sqrt{e^x}}{2}dx$$

$$\int\frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx=\int\frac{2t}{t^2+t}dt=\int\frac{2}{t+1}dt=2\ln(t+1)=$$

$$=2\ln\left(\sqrt{e^x}+1\right)$$

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' גלצנר ופרופ' שצ'ריק)
חשבו את הגבול (אם הוא קיים)

$$\lim_{n\to\infty} n^5\cdot e^{-\sqrt{n}}$$

<u>פתרון</u>
תחילה נוכיח שמתקיים $\lim_{x\to+\infty} x^{10}\cdot e^{-x}=0$

מתקיים $x^{10}\cdot e^{-x}=\frac{x^{10}}{e^x}$. זו מנה של שתי פונקציות שלכל אחת מהן יש גבול ∞ כאשר $x\to\infty$. שתי הפונקציות גזירות מכל סדר. לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל 10 פעמים. נשים לב שגזירת הפונקציה שבמכנה נותנת את עצמה. ואחרי 10 גזירות של הפונקציה שבמונה נקבל 0. לכן הגבול הוא 0.

כעת נשתמש בטענה זו כדי להוכיח את הנדרש.

מכיוון ש- $\lim_{x\to+\infty} x^{10}\cdot e^{-x}=0$ אז עבור $\varepsilon>0$ נתון, קיים

T סופי כך שעבור כל $T<\sqrt{n}$ מתקיים

$\varepsilon>\left|(\sqrt{n})^{10}\cdot e^{-\sqrt{n}}\right|$. כך עבור כל $\varepsilon>0$, ולכן הגבול הוא 0.

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורקין)

חשב $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$

פתרון

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^2}+\dots+\frac{1}{\left(\frac{2n}{n}\right)^2}\right]$$

הסכום הוא סכום רימן של האינטגרל $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$,

מתקיים $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}$. לכן זהו הגבול של הסכום.

שאלה (מבחינה של פרופ' ניר סוכן)

יש להוכיח או להפריך

א. אם $|f|$ אינטגרבילית אז f אינטגרבילית

ב. אם f אינטגרבילית על $[a,b]$ ו $\int_a^b f(x)dx=0$ אז $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]$

פתרון

נפריך את שתי הטענות על-ידי מתן דוגמאות נגדיות.

א. נגדיר $f(x)=1$ עבור x רציונלי ו $f(x)=-1$ עבור x אי-רציונלי. הפונקציה אינה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ כי עבור כל חלוקה של הקטע יש בכל תת קטע גם רציונלים וגם אי רציונלים. לכן בכל חלוקה ההפרש בין הסכום העליון לסכום התחתון הוא 2. $|f|$ פונקציה קבועה ולכן אינטגרבילית בקטע.

ב. בקטע $[-1,1]$ נגדיר $f(x)=x$ ברור שעבור כל $x\neq 0$ מתקיים $f(x)\neq 0$. אך $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' ניר סוכן)

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\ \ p,q\in N \\ 0 & x=0 \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$$

יש להוכיח או להפריך

א. $f(x)$ רציפה ב $x=0$

ב. $g(x)$ רציפה בכל $x\notin Q$

<u>פתרון</u>

נוכיח את שתי הטענות

א. עבור $\varepsilon>0$ נתון קיימת סביבה של 0 שבה $|x|<\varepsilon$. בסביבה זו מתקיים עבור כל x ש $|f(x)|<\varepsilon$.

ב. עבור x אי-רציונלי נתון ועבור $\varepsilon>0$ נתון, קיימים בקטע $(x-1,x+1)$ רק מספר סופי של רציונלים שהמכנה ב $\frac{p}{q}$ מתקיים $q<\frac{1}{\varepsilon}$ (עבור כל טבעי q יש מרחק של לפחות $\frac{1}{q}$ בין כל שני רציונלים בעלי אותו מכנה ויש רק מספר סופי של טבעיים שקטנים מ $\frac{1}{\varepsilon}$). מבין הרציונלים שבקטע $(x-1,x+1)$ רק ברציונלים האלה ערך הפונקציה גדול מ ε. מכיוון שמספרם סופי אז קיימת סביבה של x שבה אין אף רציונלי כזה. בסביבה זו עבור כל t מתקיים $|g(t)|<\varepsilon$.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לוי)

קבעו אם הטור $\sum(-1)^n\frac{2n+1}{n^3+5n^2+3}$ מתכנס בהחלט, מתכנס או מתבדר.

פתרון

לכל $n\ge 1$: $0<\frac{2n+1}{n^3+5n^2+3}<\frac{2n+10+\frac{6}{n^2}}{n^3+5n^2+3}=\frac{2}{n^2}$

מתקיים $\sum\frac{2}{n^2}<\infty$, לכן לפי קריטריון ההשוואה, הטור המקורי מתכנס בהחלט.

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לוי)

מצאו a כך ש $a\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\le a+1$

פתרון

מתקיים: $1\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

עבור כל $n\ge 2$ מתקיים: $\frac{1}{n^3}\le\frac{1}{n(n+1)}$

עבור כל n מתקיים $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

לכן, $\sum\frac{1}{n^3}\le 1+\sum\frac{1}{n(n+1)}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$

$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots=1.5$

לכן כל $0.5\le a\le 1$ יתאים.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לבהר)

הוכיחו או הפריכו
אם $0<f(x)$ לכל $0<x$ ו $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ אזי f מונוטונית יורדת בקטע מסוים $x>a$.

פתרון

נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית.
עבור כל $0<x$ נגדיר פונקציה

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2x} & x \text{ רציונלי} \\ \frac{1}{x} & x \text{ אי רציונלי} \end{cases}$$

מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$. עבור כל x רציונלי
קיים $x<y$ כך ש $\frac{1}{y}>\frac{1}{2x}$ (זה קורה לכל $x<y<2x$).
לכן הפונקציה אינה מונוטונית יורדת.

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לבהר)

הוכיחו כי לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ממשיים.

פתרון

כל הפולינום הוא גזיר מכל סדר. נוכיח באינדוקציה על n שלפולינום ממעלה n אין יותר מ n שורשים ממשיים שונים.
לפולינום ממעלה ראשונה יש רק שורש אחד (פולינום ממעלה ראשונה הוא מהצורה $ax+b$ כאשר a ו b הם קבועים). נניח שלכל פולינום ממעלה k אין יותר מ k שורשים ממשיים ונוכיח שלכל פולינום ממעלה $k+1$ אין יותר מ $k+1$ שורשים ממשיים שונים. הנגזרת של פולינום ממעלה $k+1$ היא פולינום ממעלה k. על פי משפט רול, בין כל שני שורשים שונים של פולינום ממעלה $k+1$, יש שורש של הנגזרת שלו. אילו לפולינום ממעלה $k+1$ היו יותר מ $k+1$ שורשים, אז היו יותר מ k אינטרוולים זרים שבכל אחד מהם היתה נקודת התאפסות של הנגזרת.
זו סתירה להנחה.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לוהר)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ כך ש $f(0)=f(1)$. הוכיחו כי קיים $0\le x\le 1$ כך ש $f(x)=f(x+\frac{1}{3})$.

פתרון

עבור כל $0\le x\le \frac{2}{3}$ נגדיר פונקציה $g(x)=f(x+\frac{1}{3})-f(x)$

$g(x)$ רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות.

אם קיימות זוג נקודות x_1, x_2 כך ש $g(x_1)>0$ ו $g(x_2)<0$

אז מכיוון שהפונקציה g היא רציפה אז לפי:

משפט ערך הביניים קיימת נקודה x_3 בין x_1 ל x_2

כך ש $g(x_3)=0$ ובנקודה זו מתקיים $f(x_3)=f(x_3+\frac{1}{3})$.

כעת נראה שלא יתכן ש $g(x)>0$ לכל $0\le x\le \frac{2}{3}$

(ההסבר שלא יתכן ש $g(x)<0$ לכל $0\le x\le \frac{2}{3}$ הוא דומה).

אילו היה מתקיים $g(x)>0$ לכל $0\le x\le \frac{2}{3}$ אז

היה מתקיים $f(\frac{1}{3})>f(0)$, $f(\frac{2}{3})>f(\frac{1}{3})$, $f(1)>f(\frac{2}{3})$

ואז היה מתקיים $f(1)>f(0)$ וזאת בניגוד לנתון.

שאלה (מבחינה של ד"ר אלי לוהר)

חשבו

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$$

פתרון

נציב: $t=e^x$, $dt=e^x dx$, $x=1 \Longrightarrow t=e$.

לכן נקבל

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx=\int_e^\infty \frac{dt}{t^2+2t+1}=\int_e^\infty \frac{dt}{(t+1)^2}=$$

$$=\left[\frac{-1}{t+1}\right]_e^\infty=\frac{1}{e+1}$$

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שלרבק)

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת על-ידי נוסחת הנסיגה

$$a_{n+1}=a_n(2-a_n)\ ,\quad n\ge 1$$

נתון $0<a_1<1$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

<u>פתרון</u>

<u>טענה</u>: אם $0<a_n\le 1$ אז $a_{n+1}\ge a_n$

<u>הסבר</u>: $a_{n+1}=a_n(2-a_n)\overset{*}{\ge} a_n\cdot 1$

* עבור $0<a_n\le 1$ מתקיים $2-a_n\ge 1$.

<u>טענה</u>: מתקיים $a_n\le 1$ עבור כל n.

<u>הסבר</u>: מתקיים $a_1\le 1$. נניח באינדוקציה ש $a_n\le 1$ ונוכיח ש $a_{n+1}\le 1$.

$$a_{n+1}=a_n(2-a_n)=\left(\sqrt{a_n(2-a_n)}\right)^2$$

$$\overset{*}{\le}\left(\frac{a_n+(2-a_n)}{2}\right)^2=1$$

* אי שוויון הממוצעים

משתי הטענות נקבל שהסדרה מונוטונית לא יורדת ויש לה חסם עליון של 1. לכן קיים לה גבול.
מתקיים $a=\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n(2-a_n)$$

ולפי אריתמטיקה של גבולות $a=a(2-a)$

הפתרונות של המשוואה הם $a=0,1$ אבל מתקיים לכל n ש- $a_n\ge a_1$ לכן הגבול לא יכול להיות שווה ל 0. לכן הגבול 1.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של ברוך שלרק)

הפונקציה $f(x)$ רציפה ומקיימת $|f(x)-3x|<1$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה

<u>א.</u> לכל $a\in\mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה $f(x)=a$.

<u>ב.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-3x\right)$ קיים במובן הרחב.

<u>פתרון</u>

<u>א.</u> הטענה נכונה.

נסתכל על a מסוים כלשהו ונראה שיש פתרון למשוואה.

נסתכל למשל על $x_1=\frac{1}{3}a-5$

$$|f(x_1)-3x_1|=|f(x_1)-(a-15)|<1$$

ולכן $f(x_1)<a$

נסתכל למשל על $x_2=\frac{1}{3}a+5$

$$|f(x_2)-3x_2|=|f(x_2)-(a+15)|<1$$

ולכן $f(x_2)>a$.

מכיוון שהפונקציה f היא פונקציה רציפה אז קיים $x_1<x_3<x_2$ שעבורו $f(x_3)=a$.

<u>ב.</u> הטענה לא נכונה.

נסתכל על פונקציה $f(x)=3x-(\sin x)/2$

מתקיים לכל x $|f(x)-3x|=|(\sin x)/2|<1$

מתקיים לכל x $f(x)-3x=(\sin x)/2$

אבל ל-$(\sin x)/2$ אין גבול כאשר $x\to\infty$.

הפונקציה $f(x)=3x-(\sin x)/2$ היא פונקציה רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות.

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרדק)

הוכיחו: לכל $0<y<x$ מתקיים $\frac{1}{3x^3} < \frac{\ln(x)-\ln(y)}{x^3-y^3} < \frac{1}{3y^3}$

פתרון

הפונקציה $\ln x$ היא פונקציה רציפה וגזירה עבור כל $x>0$. מתקיים $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

על-פי משפט לגרנג' $\ln x - \ln y = \frac{1}{t}(x-y)$

כאשר $y<t<x$ (t כלשהו)

לכן

$$\frac{\ln x - \ln y}{x^3-y^3} = \frac{\frac{1}{t}(x-y)}{x^3-y^3} =$$

$$= \frac{x-y}{t(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{t(x^2+xy+y^2)}$$

מתקיים $t<x$! $x^2+xy+y^2<3x^2$

לכן ביטוי זה גדול מ- $\frac{1}{x\cdot 3x^2} = \frac{1}{3x^3}$

מתקיים $y<t$! $x^2+xy+y^2>3y^2$

לכן ביטוי זה קטן מ- $\frac{1}{y\cdot 3y^2} = \frac{1}{3y^3}$

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרדק)

חשבו $\int \ln(x^2+3x+2)\,dx$

פתרון (בקיצור)

$$\int \ln(x^2+3x+2)\,dx = \int \ln\left[(x+1)(x+2)\right]dx =$$

$$= \int \ln(x+1)\,dx + \int \ln(x+2)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\right] +$$

$$+ \left[(x+2)\ln(x+2) - x\right]$$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרבק)
חשבו את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x}dx}{3+e^{4x}}$$

פתרון:
נציב $t=e^{2x}$, $dt=dx\cdot 2e^{2x}$, $x=0\Rightarrow t=1$,
$x\to\infty \Rightarrow t\to\infty$

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x}}{3+e^{4x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{6}\int_1^\infty \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt3}\right)^2+1}$$

נציב $u=\frac{t}{\sqrt3}$, $dt=\sqrt3\,du$, $t=1\Rightarrow u=\frac{1}{\sqrt3}$

נקבל
$$\frac{1}{2\sqrt3}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^\infty \frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{2\sqrt3}\arctan u\Big]_{\frac{1}{\sqrt3}}^\infty=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרבק)
חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to0}\left(x+e^{2x}\right)^{2/x}$$

פתרון

$$\lim_{x\to0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^{2x}}+1\right)^{\frac{2}{x}}\cdot\left(e^{2x}\right)^{2/x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left(1+\frac{x}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x}}\right)^{\frac{2}{e^{2x}}}\cdot\lim_{x\to0}\left(e^{2x}\right)^{2/x}=$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{2}{e^{2x}}}\cdot e^4=e^6$$

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)
חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{(\sin x)^3}$$

<u>פתרון</u>

מתקיים

$$\lim_{x\to 0} \left|\int_0^x \sin(t^2)\,dt\right| \le \lim_{x\to 0} \left|\int_0^x 1\,dt\right| = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^3 = 0$$ מתקיים

כך, שתי הפונקציות שבמונה ובמכנה שואפות לאפס כאשר $x\to 0$. שתיהן גזירות ולכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,dt}{(\sin x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3\cdot \sin^2 x\cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3\cdot \sin^2 x}$$

שתי הפונקציות שבמונה ובמכנה שוב שואפות לאפס וגם גזירות מכל סדר, לכן נוכל שוב להשתמש בכלל של לופיטל. נעשה זאת כמה פעמים וגם נצמצם כמו קודם גורמים ששואפים ל-1, נקבל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{3\cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{3\cdot 2\cdot \sin x\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{6\cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{6\cdot \cos x} = \frac{1}{3}$$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

האם קיים $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sin x}$? יש לנמק את תשובתכם.

פתרון

טענה: עבור כל $0<x<1$: $x+\sin x>0$

הסבר: נכון סכום של שתי פונקציות שהן חיוביות בקטע.

טענה: עבור כל $0<x<1$: $x+\sin x<3x$

הסבר: נגדיר פונקציה $f(x)=3x-(x+\sin x)$

על פי משפט לגרנז' מתקיים

$$f(x)=f(0)+f'(t)\cdot(x-0)$$

כאשר t היא נקודה $0<t<x$

מתקיים $f(0)=0$ ו- $f'(t)=2-\cos t>0$

לכן $f(x)>0$ ולכן $x+\sin x<3x$.

משתי הטענות נקבל

$$\int_a^1\frac{dx}{x+\sin x}\geq\int_a^1\frac{dx}{3x}=\frac{1}{3}\int_a^1\frac{1}{x}dx=\left[\frac{\ln x}{3}\right]_a^1$$

$$=-\frac{1}{3}\ln(a)$$

אך כאשר $a\to0$ מתקיים $\lim_{a\to0}\ln(a)=-\infty$

ולכן האינטגרל לא קיים.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)
מצאו קירוב רציונלי ל- $\sqrt{(4.5)^3}$ עם שגיאה שלא עולה על 0.001.

פתרון
נסתכל על הפונקציה $f(x)=x^{1.5}$. צריך לקרב אותה בנקודה $x=4.5$, נשתמש בפיתוח טיילור.

$$f(4.5)=f(4.41)+f'(4.41)(4.5-4.41)+$$
$$+f''(4.41)\cdot\frac{(4.5-4.41)^2}{2!}+f^{(3)}(t)\frac{(4.5-4.41)^3}{3!}$$

כאשר $4.41<t<4.5$ מתקיים

$$f(4.41)=4.41^{3/2}=2.1^3$$
$$f'(4.41)=1.5\cdot 4.41^{0.5}=1.5\cdot 2.1$$
$$f''(4.41)=\frac{3}{4}\cdot 4.41^{-0.5}=\frac{3}{4\cdot 2.1}$$
$$\left|f^{(3)}(t)\cdot\frac{(4.5-4.41)^3}{3!}\right|=\frac{1}{8}\cdot t^{-1.5}\cdot\frac{0.09^3}{6}<\frac{0.09^3}{6}<0.001$$

לכן קירוב מספק הוא

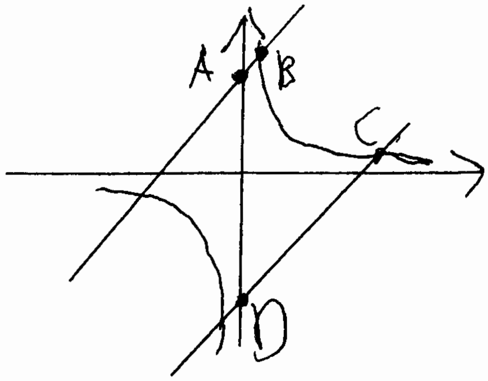
$$2.1^3+\frac{3}{2}\cdot 2.1\cdot 0.09+\frac{3}{4\cdot 2.1}\cdot\frac{0.09^2}{2}=$$
$$=2.1(2.1^2+0.135)+\frac{81}{8\cdot 7000}=$$
$$=2.1(4.41+0.135)+\frac{81}{56000}=$$
$$=\frac{534492+81}{56{,}000}=\frac{534{,}573}{56{,}000}$$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצ'רבק)

חשבו את השטח הכלוא בין הקווים $xy=3$, $y=x+2$, $y=x-2$



פתרון

משיקולי סימטריה השטח S שווה לפעמיים השטח S_{ABCD}.

נמצאת שיעורי הנקודה B:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{x} \\ y=x+2 \end{cases}$$

והנקודה היא $(1,3)$.

נמצא את שיעורי הנקודה C

$$\begin{cases} y=\frac{3}{x} \\ y=x-2 \end{cases}$$

והנקודה היא $(3,1)$

בנוסף $A=(0,2)$, $D=(0,-2)$.

$$S=2\cdot S_{ABCD}=2\left[\int_0^1 (x+2)-(x-2)\,dx+\int_1^3 \frac{3}{x}-(x-2)\,dx\right]=2\cdot\int_0^1 4\,dx+\left[6\ln x-x^2+4x\right]_1^3$$

$$=8+6\cdot\ln(3)$$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שצרבק)

הפונקציה $f(x)$ היא רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$ ומקיימת $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$ עבור $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה

(א) $\lim_{n\to\infty}\sin(f(n^2))=0$ (ב) $\lim_{n\to\infty} f(f(n))=0$

פתרון

א. מתקיים.

מכיון שמתקיים $\lim_{n\to\infty} f(n)=0$ אז גם מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(n^2)=0$ (n^2 הם טבעיים)

לכן עבור כל $\delta>0$ נתון קיים N כך שעבור כל $n>N$ $|f(n^2)|<\delta$. הפונקציה $\sin$ היא רציפה ב-0 (למעשה גם בכל נקודה). מתקיים $\sin 0=0$, לכן עבור כל $\varepsilon>0$ נתון קיים δ שעבור כל x, $|x|<\delta$ מתקיים $\sin x<\varepsilon$. נבחר N מספיק גדול כך שעבור כל $n>N$ $|f(n^2)|<\delta$ עבור אותו δ הנדרש בשביל ε נתון.

ב. נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית. נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ 1-x & 0<x<1\\ 0 & 1\le x\end{cases}$$

זו פונקציה רציפה, עבור כל n שלם $n\ge 1$ מתקיים $f(n)=0$ ולכן $f(f(n))=f(0)=1$. לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(f(n))=\lim_{n\to\infty} 1=1$.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחנה של פרופ' שלניק)

חשבו את הגבולות

(א). $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$

(ב) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln x}{x-\ln x}\right)^{(x/\ln(x))}$

פתרון

(א) המונה והמכנה שואפים כל אחד ל- $+\infty$ כאשר $x\to+\infty$, הם גזירים מכל סדר ולכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל מספר פעמים.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt+x\cdot e^{x^2}}{2x\cdot e^{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}+2\cdot x\cdot x\cdot e^{x^2}+e^{x^2}}{2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}+2\cdot e^{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+2x^2}{4x^2+2}=\frac{1}{2}$$

(ב)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln x}{x-\ln x}\right)^{(x/\ln x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-\ln x}{x-\ln x}+\frac{2\ln x}{x-\ln x}\right)^{\frac{x-\ln x}{2\ln x}}\right)^{\frac{2x}{x-\ln x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x-\ln x}{x-\ln x}+\frac{1}{\frac{x-\ln x}{2\ln x}}\right)^{\frac{x-\ln x}{2\ln x}}\right)^{\frac{2x}{x-\ln x}}$$

אריתמטיקה של גבולות

$= e^{2}$ (הגבול של המעריך החיצוני הוא 2).

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרדק)

חשבו את האינטגרל $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}$ אם הוא קיים.

פתרון

$t=e^x$, $dt=t\cdot dx$, $x=2\Rightarrow t=e^2$.

נקבל

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dt}{(t-1)\cdot t}$$

הפונקציה $\frac{1}{(t-1)t}$ היא חיובית עבור כל $t\ge e^2$. לכן האינטגרלים $\int_{e^2}^{a}\frac{dt}{(t-1)t}$ הם עולים כאשר a עולה.

אם קיים להם הגבול כאשר $a\to\infty$ אז קיים האינטגרל $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dt}{(t-1)t}$. מכיון שהם מונוטונים עולים אז אם קיים הגבול של $\int_{e^2}^{e^2+n}\frac{dt}{(t-1)t}$ כאשר n הם שלמים ; $n\to+\infty$, אז קיים הגבול כאשר $a\to+\infty$.

מתקיים:

$$\int_{e^2}^{e^2+n}\frac{dt}{(t-1)t}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\frac{dt}{(t-1)t}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\sum_{k=-1}^{n-2}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\frac{dt}{t}-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{e^2+k}^{e^2+k+1}\frac{1}{t}\overset{*}{=}\int_{e^2-1}^{e^2}\frac{dt}{t}-\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}=$$

$$=\ln t\Big]_{e^2-1}^{e^2}-\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}=2-\ln(e^2-1)-\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}$$

$*$ איברים מתבטלים ורק שני הקיצונים נשארים.

הקטע בין e^2+n-1 ל e^2+n הוא באורך 1 והערך המקסימלי של הפונקציה בקטע זה הוא $\frac{1}{e^2+n-1}$.

לכן כאשר $n\to\infty$: $\int_{e^2+n-1}^{e^2+n}\frac{dt}{t}\to0$ ולכן הגבול של סדרת האינטגרלים הוא $2-\ln(e^2-1)$ וזהו ערכו של $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{e^x-1}$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרק)

הוכיחו: לכל $0<y<x$ מתקיים $y^2 < \frac{x^2 \cdot e^x - y^2 \cdot e^y}{e^x - e^y} < (x+1)^2$

פתרון

נוכיח אי שוויון שמאלי: $e^x - e^y > 0$!

$$x^2 \cdot e^x - y^2 \cdot e^y > y^2 \cdot e^x - y^2 \cdot e^y = y^2(e^x - e^y) > 0$$

לכן

$$\frac{x^2 e^x - y^2 e^y}{e^x - e^y} > \frac{y^2(e^x - e^y)}{e^x - e^y} = y^2$$

נוכיח אי שוויון ימני:

נגדיר $t = e^x$, $z = e^y$. כך:

$$x^2 \cdot e^x = \ln^2 t \cdot t \qquad y^2 \cdot e^y = \ln^2 z \cdot z$$

הפונקציה $f(w) = \ln^2 w \cdot w$ היא פונקציה רציפה וגזירה עבור כל $w>0$, מתקיים:

$$f'(w) = 2\ln w \cdot \frac{1}{w} \cdot w + \ln^2 w = 2\ln w + \ln^2 w$$

לפי משפט לגרנז' מתקיים עבור איזשהו w: $y<w<x$

$$\ln^2 t \cdot t - \ln^2 z \cdot z = f'(w)(t-z) =$$

$$= (2\ln w + \ln^2 w)(t-z) < (2\ln e^x + \ln^2 e^x)(e^x - e^y) =$$

$$= (2x + x^2)(e^x - e^y)$$

לכן

$$\frac{x^2 \cdot e^x - y^2 \cdot e^y}{e^x - e^y} < 2x + x^2 < 1 + 2x + x^2 = (x+1)^2$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שלרק)

חשבו $\int \ln(x^2+2x+2)dx$

פתרון

נציב $t = x+1$ ונקבל $\int \ln(x^2+2x+2)dx = \int \ln(t^2+1)dt$

נשתמש באינטגרציה בחלקים: $u = \ln(t^2+1)$, $u' = \frac{2t}{t^2+1}$, $v' = 1$, $v = t$. נקבל

$$t \cdot \ln(t^2+1) - 2\int \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= t \cdot \ln(t^2+1) - 2\int dt + 2\int \frac{dt}{t^2+1} = t \cdot \ln(t^2+1) - 2t + 2\arctan(t) =$$

$$= (x+1) \cdot \ln(x^2+2x+2) - 2(2x+1) + 2\arctan(x+1)$$

שאלה (מבחינה של פרופ' שליבקר)

חשבו את נפח הגוף המתקבל על-ידי סיבוב הקשת $y=\cos^2x$, $0\leq x<\pi/2$ סביב ציר ה-x.

פתרון

$$V=\int_0^{\pi/2}\pi\cdot\left(\cos^2x\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$$

נחשב את $\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$. בשביל זה נחשב אינטגרלים אחרים.

$$\pi/2=\int_0^{\pi/2}dx=\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2dx=\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx+\int_0^{\pi/2}2\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx$$

בקטע $[0,\pi/2]$ מתקיים $\int_0^{\pi/2}\sin^4x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx$

לכן $\pi/2=2\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx+2\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^2x\,dx$

לכן $\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx=\pi/4-\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^2x\,dx$

מתקיים $\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^22x\,dx$

מתקיים $\pi/2=\int_0^{\pi/2}dx=\int_0^{\pi/2}\sin^22x\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos^22x\,dx$

בקטע זה מתקיים $\int_0^{\pi/2}\sin^22x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^22x\,dx$

לכן $\int_0^{\pi/2}\sin^22x\,dx=\pi/4$! $\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cdot\cos^2x\,dx=\pi/16$

נקבל ש: $\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^4x\,dx=\pi\left(\pi/4-\pi/16\right)=\frac{3\pi^2}{16}$

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סובן)

<u>תהי</u> $f:(0,\infty)\to R$ פונקציה גזירה פעמיים. נתון

$f''>0$ $(0,\infty)$?

<u>הוכיחו</u> שלכל $x>0$ מתקיים $f(2x)-f(x)\le f(3x)-f(2x)$

<u>פתרון</u>

הפונקציה f גזירה פעמיים בקטע $[x,2x]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע זה, לכן לפי משפט לגרנג' קיים

$$f(2x)-f(x)=f'(y)(2x-x)=f'(y)\cdot x$$

כאשר y היא איזשהי נקודה המקיימת $x<y<2x$.

הפונקציה f גזירה פעמיים בקטע $[2x,3x]$ לכן היא רציפה וגזירה בקטע זה לכן לפי משפט לגרנג' קיים

$$f(3x)-f(2x)=f'(z)\cdot(3x-2x)=f'(z)\cdot x$$

כאשר z היא איזשהי נקודה המקיימת $2x<z<3x$.

הפונקציה f' היא גזירה בקטע $[x,3x]$ ולכן היא גם רציפה בקטע $[x,3x]$. היא גם רציפה וגזירה בקטע $[y,z]$ לכן לפי משפט לגרנג' מתקיים

$$f'(z)-f'(y)=(z-y)\cdot f''(w)$$

כאשר $y<w<z$

$f''(w)>0$ ולכן $f'(z)>f'(y)$.

לכן $f(2x)-f(x)\le f(3x)-f(2x)$.

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' סובן)

<u>הוכיחו</u> שלכל $R\ni x>0$ מתקיים

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

<u>פתרון</u>

$f(x)=\ln(1+x)$ רציפה וגזירה בכל נקודה $0\le x$. נסתכל על איזשהו x קבוע. עבור איזשהי נקודה w $0<w<x$ מתקיים

$$f(x)\overset{?}{=}f(0)+f'(w)\cdot x=\ln(1+0)+\frac{x}{1+w}=\frac{x}{1+w}.$$

מכיון ש $1+w<1+x$ אז מתקבל אי השיוויון השמאלי.

מכיון ש $1+w>1$ אז מתקבל אי השיוויון הימני.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

__שאלה__ (מבחינה של פרופ' סוכן)

תהי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-1,1]$ כדלהלן:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $f(x)$ רציפה ב- $x=0$

ב. $f(x)$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$?

__פתרון__

א. נוכיח את הטענה.
מתקיים $f(0)=0$. עבור כל $\varepsilon>0$ נתון קיימת סביבה של 0 שבה $|f(x)|<\varepsilon$ (נבחר סביבה שהיא הקטע $(-\varepsilon,\varepsilon)$). אם $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ו-x רציונלי אז $|f(x)|=|x|<\varepsilon$ ואם $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ו-x אי רציונלי אז $|f(x)|=0<\varepsilon$.
לכן הפונקציה רציפה ב- 0.

ב. נפריך את הטענה.
נראה שהיא לא אינטגרבילית למשל בקטע החלקי $[0.5,1]$ ולכן היא לא אינטגרבילית בקטע כולו.
בכל חלוקה של הקטע $[0.5,1]$ יש בכל קטע נקודה שבה $f(x)=0$ (כי בכל קטע יש מספרים אי רציונליים) ויש גם נקודה שבה $f(x)>0.5$ (כי בכל קטע יש מספרים רציונליים). לכן בכל חלוקה ההפרש בין הסכום העליון לסכום התחתון הוא לפחות $0.5\cdot 0.5=0.25$ (כאשר 0.5 הוא אורך הקטע $[0.5,1]$).

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלה גוריל)

חשב

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n^2)\right)$$

פתרון

נראה שקיים הגבול $\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)\right)$ ונחשב אותו. מזה נקבל שקיים הגבול הנדרש (שהוא אותו גבול).

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)}{\frac{1}{x^3}}$$

כאשר $x\to\infty$ אז גם המונה וגם המכנה שואפים לאפס. שתי הפונקציות שבמונה ובמכנה הן גזירות, לכן נוכל להשתמש בכלל של לופיטל שלפיו הגבול של המנה שווה לגבול של מנת הנגזרות.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x^2)}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-\frac{3}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{3(1+x^4)}=\infty$$

שאלה (מבחינה של ד"ר אלה גוריל)

בדוק האם הטור $\sum\frac{(-1)^n\cdot n^n}{3^n\cdot n!}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

פתרון

נגדיר $a_n=\frac{(-1)^n\cdot n^n}{3^n\cdot n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{e}{3}$$

לכן לפי מבחן המנה הטור מתכנס בהחלט.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב

שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורדיל)

הוכח כי $\sqrt{1+2x} \le 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$ לכל $x>-\frac{1}{2}$.

(רמז: ניתן להיעזר בפיתוח טיילור מקלורן).

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x)=\sqrt{1+2x}-1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3$ ונראה שהיא לא חיובית בכל התחום. מכאן תנבע הטענה שצריך להוכיח. הפונקציה גזירה מכל סדר בתחום.

$$f(0)=0$$
$$f'(x)=(1+2x)^{-1/2}-1+x-\frac{3}{2}x^2$$
$$f''(x)=-(1+2x)^{-3/2}+1-3x$$
$$f^{(3)}(x)=3(1+2x)^{-5/2}-3$$
$$f^{(4)}(x)=-15\cdot(1+2x)^{-7/2}$$

מתקיים $f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$

לכן עבור כל $x>-\frac{1}{2}$ קיים

$$f(x)=f^{(4)}(c)\cdot\frac{x^4}{4!}$$

כאשר c היא נקודה בקטע שבין 0 ל-x (שארית לגרנז').

אך $f^{(4)}(c)=-15(1+2c)^{-7/2}<0$ $\left(-\frac{1}{2}<c\right)$

לכן הפונקציה לא חיובית בכל נקודה בתחום.

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורדיל)

תהי $f(x)$ רציפה וגזירה בקטע $(0,\infty)$ כך ש-$f(n)=0$ לכל $n\in N$ וקיים גבול סופי $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=L$. הוכח כי $L=0$.

פתרון

עבור כל n קיים $f(n+1)=f(n)+f'(x)\cdot 1$ כאשר x היא נקודה המקיימת $n<x<n+1$. לכן עבור כל n קיים x $n<x<n+1$ כך ש-$f'(x)=0$. אם היה מתקיים $L\neq 0$ אז עבור n מספיק גדול לא היה קיים $x>n$ כך ש-$f'(x)=0$.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורליק)

הוכח כי למשוואה $x^3-6x^2+9x=2$ יש בדיוק שלושה פתרונות שונים.

פתרון

נגדיר פונקציה $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$. למשוואה יש פתרונות בדיוק בנקודות בהן הפונקציה מתאפסת. הפונקציה גזירה מכל סדר. בין כל שתי נקודות שבהן הפונקציה מתאפסת, יש נקודת התאפסות של הנגזרת שלה. בין כל שתי נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת, יש נקודת התאפסות של הנגזרת השניה. שלכן הנגזרת השניה היא פונקציה ליניארית לכן היא לא מתאפסת ביותר מנקודה אחת. לכן $f(x)$ מתאפסת בלא יותר מ 3 נקודות שונות.

מתקיים: $f(0)<0$, $f(1)>0$, $f(3)<0$, $f(10)>0$. f רציפה. לפי משפט ערך הביניים, בין כל שתי נקודות שבהן סימן הפונקציה הוא שונה, קיימת נקודת התאפסות של הפונקציה.

שאלה (מבחינה של ד"ר אנה גורליק)

הוכח או הפרך: אם $f(x)$ גזירה ב- R אזי $f'(x)$ רציפה ב R.

פתרון

נפריך את הטענה ע"י מתן דוגמא נגדית.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

הפונקציה גזירה עבור כל $x\neq 0$ (כמכפלת פונקציות גזירות).

היא גזירה ב 0 כי קיים $\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}$

עבור $x\neq 0$ קיים $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\cdot x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

אבל ל $\cos\frac{1}{x}$ לא קיים הגבול כאשר $x\to 0$.

לכן הנגזרת לא רציפה ב 0.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

שאלה (מבחינה של ד"ר אלנה גורביץ')

יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$. מצאו נוסחת נסיגה עבור

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx\ ,\quad n=0,1,2,\dots$$

כולל תנאי התחלה (I_0).

פתרון

$$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$$

כדי לחשב את I_n נשתמש באינטגרציה בחלקים.

$u=x^n$, $u'=n\cdot x^{n-1}$, $v'=\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$, $v=\sqrt{a+bx}\cdot\frac{2}{b}$

$$I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx=x^n\cdot\sqrt{a+bx}\cdot\frac{2}{b}-\frac{2n}{b}\cdot\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,dx$$

$$=\frac{2}{b}\cdot x^n\cdot\sqrt{a+bx}-\frac{2n}{b}\cdot\int\frac{x^{n-1}(a+bx)}{\sqrt{a+bx}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{b}\cdot x^n\sqrt{a+bx}-\frac{2na}{b}\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx}}\,dx-2n\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{b}\cdot x^n\cdot\sqrt{a+bx}-\frac{2na}{b}\cdot I_{n-1}-2n\cdot I_n$$

נקבל

$$I_n=\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2}{b}\cdot x^n\sqrt{a+bx}-\frac{2na}{b}\cdot I_{n-1}\right]$$

שאלה (מבחינה של ד"ר אלה גורדיל)

נתון טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ לכל $n \in N$. בדוק האם

(i) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n}{a_n}$ מתכנס.

(ii) הטור $\sum \sin^2 a_n$ מתכנס.

פתרון

(i) מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ אז קיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

לכן קיים $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = \infty$

(ii) שוב מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} = 1$

ולכן התכנסות הטור $\sum \sin a_n^2$ שקולה להתכנסות הטור $\sum a_n^2$. מכיון ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז קיים N כך שעבור כל $n > N$ $a_n^2 < a_n$. לכן הטור $\sum a_n^2$ מתכנס. נקבל שהטור $\sum \sin^2 a_n$ מתכנס.

פתרונות מקוצרים בחדו"א 1ב
שלומי

<u>שאלה</u> (מבחינה של פרופ' ניר סוכן)

יהיו f, g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ כך שלפחות אחת מהן אין שורשים ב-$[a,b]$. צ"ל להוכיח שקיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש- $g(c)\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

<u>פתרון</u>

נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$g(x)$ לא מתאפסת בקטע. מכיון שהיא רציפה אז או שהיא חיובית בכל הקטע או שהיא שלילית בכל הקטע. נניח שהיא חיובית בכל הקטע. ההוכחה במקרה האחר היא דומה.

נגדיר פונקציה $h(t)$: $h(t) = g(t)\int_a^b f(x)dx - f(t)\int_a^b g(x)dx$

בנקודות שבהן h מתאפסת מתקיים התנאי הנדרש. $h(t)$ רציפה כהפרש של מכפלות של פונקציות רציפות. נסתכל על הפונקציה $r(t)=\frac{f(t)}{g(t)}$. מכיון ש-$g(x)$ לא מתאפסת ומכיון ש-$f(t)$ ו-$g(t)$ הן רציפות, אז המנה היא רציפה. אם $r(t)$ היא פונקציה קבועה בקטע אז $h(t)=0$ בכל נקודה בקטע. אחרת קיימת נקודה d_2 בה $r(t)$ מקבלת ערך מכסימלי e_2 בקטע וקיימת נקודה d_3 בה $r(t)$ מקבלת ערך מינימלי e_3 בקטע.

טענה: $e_3 \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le e_2$

הסבר: הפונקציה $f(x)$ אינה גדולה בכל נקודה מהפונקציה $e_2 g(x)$ ואינה קטנה מהפונקציה $e_3 g(x)$

מתקיים $h(d_2) = g(d_2)\int_a^b f(x)dx - e_2 g(d_2)\int_a^b g(x)dx \le$

$\le g(d_2)\left[e_2\int_a^b g(x)dx - e_2\int_a^b g(x)dx\right] = 0$

מתקיים $h(d_3) = g(d_3)\int_a^b f(x)dx - e_3 g(d_3)\int_a^b g(x)dx \ge$

$$\ge g(d_3)\left[e_3\int_a^b g(x)dx - e_3\int_a^b g(x)dx\right] = 0$$

מכיון שהפונקציה h היא פונקציה רציפה אז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה בין d_2 ל d_3 שבה הפונקציה מתאפסת.

שאלה (מבחינה של פרופ' נ"ר סיגן)

צריך לחשב

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$$

פתרון

נסתכל על $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}}$. עבור כל k,n מתקיים

$1 \ge \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+k}} \ge \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}}$, לכן עבור כל n נתון הסכום אינו גדול

מ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 = 1$ ואינו קטן מ: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}}$

נראה ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = 1$ ומכאן נקבל שהגבול הנדרש הוא 1.

נחשב תחילה $\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{2n^2}$ ונראה שהוא אפס. לכן

לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2n^2}} = 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2)+2\ln(n)}{n} = 0$$

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך
אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית ($0<a_n$ לכל n) מונוטונית יורדת
אז טור $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.

פתרון

ניתן דוגמא נגדית $a_n=1+\frac{1}{n}$ ואז הסדרה מונוטונית יורדת.
אבל בטור $\sum(-1)^n a_n$ ההפרש בין הסכום עד מקום n לבין הסכום עד מקום $n+1$ גדול בערכו המוחלט מ-1 תמיד,
לכן אין התכנסות (לפי תנאי קושי).

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך: מתקיים $\lim_{x\to\infty}\left(e^{x^2}\cdot e^{-e^x}\right)=0$.

פתרון

מתקיים $e^{x^2}\cdot e^{-e^x}=e^{x^2-e^x}$. e^x גדל מהר יותר מאשר x^2
ולכן הגבול של המעריך הוא $-\infty$ והגבול כולו הוא 0
(אפשר לראות באמצעות הכלל של לופיטל ש $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$).

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך
אם $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ גזירה בקטע $(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$
אז $f'(\frac{1}{2})=0$ ו- $x=\frac{1}{2}$ היא נקודת קיצון מקומי.

פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית. $f(x)=(x-\frac{1}{2})^3x(x-1)$
הנגזרת של $f(x)$ בנקודה $\frac{1}{2}$ היא 0 כי בכל חלק* של הנגזרת
נשאר $(x-\frac{1}{2})$ עם אקספ' חזקה חיובית. $f(x)$ מחליפה
סימן בנקודה $\frac{1}{2}$ (*לפי גזירה של מכפלה).

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך:
אם $f'(x) \ge g'(x)$ לכל $x \ge 0$ ו-$f(0)=g(0)$ אז $f(x) \ge g(x)$ לכל $x \ge 0$.

פתרון

נראה שהטענה נכונה. נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$.
מתקיים $h'(y) \ge 0$ לכל $y \ge 0$. עבור כל x מתקיים
$h(x)=h(0)+h'(y)(x-0)$ כאשר y נקודה בין 0 ל-x ו-$h(0)=0$.

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך:
אם $f'(x)>0$ בקטע $[a,b]$ אז הגרף של $f(x)$ מעל
המיתר שמחבר $(a,f(a))$ עם $(b,f(b))$.

פתרון

נפריך את הטענה על ידי מתן דוגמא נגדית:
בקטע $[1,2]$ נגדיר $f(x)=x^2$. מתקיים $f'(x)>0$
והגרף הינו מתחת למיתר.

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הסדרה a_n מקיימת $|a_{n+1}-a_n| < \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}$.
הוכח כי הסדרה מתכנסת.

פתרון

נראה שהסדרה מקיימת את תנאי קושי. עבור $m>n$ מתקיים
אי השוויון (אי שוויון המשולש)
$$|a_m-a_n| \le |a_{n+1}-a_n| + |a_{n+2}-a_{n+1}| + \dots + |a_m-a_{m-1}|$$
וזה לכל N גדול קטן מהטור $\sum_{i=n}^{m-1} \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-5}$
האינסופי $\sum_{i=n}^{\infty} \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-5} = \frac{\pi\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}}{1-\frac{1}{3}}$. עבור כל $\varepsilon>0$ קיים
N כך שעבור כל $n>N$ סכום זה קטן מ-ε.

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

כמה שורשים ממשיים יש למשוואה $3|x|=e^x$?

פתרון

תחילה נבדוק כמה שורשים אי-שליליים יש למשוואה.
עבור $x\ge 0$ נגדיר פונקציה $h(x)=e^x-3x$.
מספר האפסים שהפונקציה מתאפסת עבור $x\ge 0$ שווה למספר השורשים של המשוואה ב $x\ge 0$.
$h'(x)=e^x-3$: מתקיים $h'(x)<0$ עבור $\ln(3)>x\ge 0$ ולכן בגלל מונוטוניות הפונקציה יש לכל היותר שורש אחד בקטע $\ln(3)>x\ge 0$, מתקיים $h'(x)>0$ עבור $\ln(3)<x$ ולכן בגלל מונוטוניות הפונקציה יש לכל היותר שורש אחד עבור $\ln(3)<x$. מכיוון ש $h(0)>0$, $h(\ln(3))<0$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=+\infty$, אז יש שורש אחד בין 0 ל $\ln(3)$ ושורש אחד בין $\ln(3)$ ל ∞, לכן יש שני שורשים אי-שליליים.

עבור $x<0$ מספר השורשים שווה למספר נקודות ההתאפסות של $g(x)=e^x+3x$, מתקיים $g'(x)>0$ עבור כל $x<0$.
$g(0)>0$! $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ולכן יש שורש שלילי אחד.

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך
לכל שתי סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$$

פתרון

נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית: $a_n=(-1)^{n+1}$, $b_n=(-1)^n$. אז $a_n+b_n=0$ לכל n אך

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n=2$$

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אייזלמן)

תהי $f(x)$ גזירה שלוש פעמים ב $[-1,1]$ ו- $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$. הוכח כי
(i) הטור $\sum f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.
(ii) הטור $\sum f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ מתבדר.
רמז: השתמש בנוסחת טיילור עבור $n=2$).

פתרון

מכיוון שהפונקציה גזירה שלוש פעמים בקטע אז הנגזרת השניה שלה רציפה (הנגזרת של הנגזרת השניה היא הנגזרת השלישית ואין נגזרת לפונקציה לא רציפה), מכיוון שהיא רציפה אז לערך המוחלט שלה יש חסם אחיד שנקרא לו b.
לפי נוסחת טיילור

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+f''(c)\cdot\frac{(x-0)^2}{2}$$

כאשר c נקודה בין 0 ל x.
מתקיים

$$\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\le 0+\left|f'(0)\cdot\frac{1}{n^2}\right|+\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)^2$$

הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס. היחס $\dfrac{\left|f'(0)\cdot\frac{1}{n^2}\right|+b/2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4}{\frac{1}{n^2}}$
שואף לקבוע כאשר $n\to\infty$ ולכן לפי מבחן ההשוואה הטור מתכנס (טור הערכים המוחלטים מתכנס ולכן הטור מתכנס).

מתקיים

$$f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)=0+f'(0)\frac{1}{n\ln(n)}+\frac{c_n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^2$$

כאשר c_n הם קבועים שמתאימים לn-ים, מתקיים $|c_n|\le b$.
קיים קבוע N כך שעבור כל $n>N$:
$\left|f'(0)\cdot\frac{1}{n\ln(n)}\right|/2>\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^2$ כאשר 2 הוא קבוע שרירותי.

לכן החל מאותו N איברי הטור $f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ אינם מחליפים סימן ובמובן החל מאותו מקום מתקיים למשל $\left|f\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right|\ge\frac{|f'(0)|}{2}\cdot\frac{1}{n\ln(n)}$. לכן על-פי מבחן ההשוואה
הטור מתבדר (הטור $\sum\frac{1}{n\ln(n)}$ מתבדר ואליו משווים).

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

תהי $f(x)$ גזירה ב $(0,+\infty)$ המקיימת $x<f'(x)$ לכל $x>0$.
הוכח כי $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה ב $(0,+\infty)$.
רמז: הוכח תחילה כי לכל $0<x<y$ מתקיים
$f(y)-f(x)\ge (y-x)x$.

פתרון

לפי משפט לגרנז' $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$
כאשר c היא נקודה בין x ל-y.
מתקיים $f'(c)>c$ ומכיון ש $x<c$ אז $x<f'(c)$
וטענת הרמז מתקבלת.
כדי ש $f(x)$ תהיה רציפה במידה שווה, צריך
שעבור כל $\varepsilon>0$ יהיה קיים $\delta>0$ כך שאם
$|x-y|\le\delta$ אז $|f(y)-f(x)|\le\varepsilon$. נבחר למשל $\varepsilon=0.5$. אז
עבור כל $\delta>0$ נבחר $\frac{1}{\delta}<x$ ואז נבחר x ו-y
במרחקים מרחק של δ זה מזה:
$$|f(y)-f(x)|\ge\delta\cdot\frac{1}{\delta}=1>0.5$$
וזו סתירה לרציפות במידה שווה.

שאלה (מבחינה של פרופ' אידלמן)

הוכח
$$\frac{2}{3\pi}\le\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\le\frac{1}{\pi}$$

פתרון

עבור כל $2\pi\le x\le 3\pi$ מתקיים $\sin x\ge 0$.
מתקיים
$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\ge\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{3\pi}\,dx=\frac{1}{3\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{3\pi}\Big[-\cos x\Big]_{2\pi}^{3\pi}=\frac{2}{3\pi}$$
$$\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\le\int_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin x}{2\pi}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}$$

פתרונות מקוצרים לשאלות
מבחינות בחדו"א לפיסיקאים
שלומי

שאלה (מקדימה של פרופ' אידלמן)

הוכח או הפרך

אם $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקטע $[0,+\infty)$

אז $f(x)$ חסומה ב $[0,+\infty)$.

פתרון

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית. נגדיר $f(x)=\sqrt{x+1}$

אז כמובן ש $f(x)$ לא חסומה. אך לפי משפט לגרנז'

מתקיים $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$ כאשר c היא נקודה

בין x ל y. אך $f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c+1}}<\frac{1}{2}$. עבור $\varepsilon>0$

נבחר $\delta=\varepsilon$ ככה אם $|x-y|<\delta$ אז

$|f(y)-f(x)|<\frac{1}{2}\delta<\varepsilon$.

שאלה (מקדימה של פרופ' אידלמן)

הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $a_n\geq 0$ מתכנס אז טור

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ גם מתכנס. האם זה נכון גם בלי תנאי $a_n\geq 0$?

פתרון

אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז קיים N כך שעבור כל

$n>N$ מתקיים $a_n<1$, מכיוון שעבור $1\geq a_n\geq 0$ מתקיים

$0\leq a_n^2\leq a_n$ אז לפי קריטריון ההשוואה הטור מתכנס.

אבל אי אפשר לוותר על התנאי $a_n\geq 0$:

$\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתכנס כי זהו טור שבו הערכים המוחלטים

שואפים לאפס מונוטונית והסימנים מתחלפים.

אך $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ – אין התכנסות.