מועד א׳ סמסטר ב׳

א׳ תמוז תשס״ג

01.07.2003

מבחן באלגברה ב-1

המרצה: אולג שרון

משך המבחן: 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

ענה על 4 מתוך 6 השאלות הבאות.

1. (25 נק׳) הוכח את המשפט השלישי של סילוב:

תהי G חבורה סופית, $p \mid |G|$ ראשוני, $P<G$ חבורת p-סילוב של G. נסמן מס׳ חבורות p-סילוב של G $=n_p$.

הוכח: (12 נק׳) א) $n_p=[G:N(P)]$

(13 נק׳) ב) $n_p \equiv 1 \pmod{p}$

2. (13 נק׳) א) מצא מחלקים אלמנטריים וגורמים אינווריאנטים של החבורה
$$G=\mathbb{Z}_{100}\oplus\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_{35}$$

(12 נק׳) ב) תאר מהו מספר האיברים מסדר 2 ו-4 ב-G.

3. (25 נק׳) הוכח שאם G חבורה מסדר p^n ($n \geq 1$, p ראשוני) ו-$\{e\}\neq H \triangleleft G$, אז $H\cap Z(G)\neq\{e\}$.

4. (25 נק') תהי G חבורה קומוטטיבית, $H<G$.

(13 נק') א) הוכח שאם $G/H \approx \mathbb{Z}^l$ אז $G \simeq H \oplus \mathbb{Z}^l$

(כש $\mathbb{Z}^l := \underbrace{\mathbb{Z}\oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{l \text{ פעמים}}$)

(12 נק') ב) הוכח שאם $H<L<G$ ו $G/L \approx \mathbb{Z}^n$, $L/H \approx \mathbb{Z}^m$, $H \simeq \mathbb{Z}^k$

אז $G \simeq \mathbb{Z}^{k+m+n}$

5) (25 נק')

תהי $\gamma = (12)(34)(56 \dots n) \in S_n$ ($n>6$).

הוכח ש $C(\gamma) \approx D_4 \times C_{n-4}$

6) (25 נק')

תהי G חבורה, $|G| = pqr$ ($p<q<r$ ראשוניים).

(9 נק') א) הוכח שיש $H \triangleleft G$ כך ש $|H| = qr$

(8 נק') ב) הוכח ש G פתירה

(8 נק') ג) הוכח שכל חבורת r-סילוב של G היא נורמלית

(הדרכה: הסתכל ב $N(R)$ כש R חבורת r-סילוב)

בהצלחה!

אלגברה ב'-1, מועד א' (7.7.98)

מורים: רופּס, וסרמן.

משך המבחן: 3 שעות. אין להשתמש בחומר עזר.
ענה על 4 שאלות בלבד.

1. א. נניח a,b איברים מתחלפים מסדר סופי בחבורה G. הוכח ש- ab מסדר סופי ושאם הסדרים באלה זרים הסדר של ab הוא מכפלתם.
ב. הוכח שאם m,n מספרים טבעיים זרים אז המכפלה של חבורה ציקלית מסדר n עם חבורה ציקלית מסדר m היא ציקלית.

2. א. אם A חבורה אבלית מסדר n ו-m מחלק את n אז יש ל-A חבורה חלקית מסדר m וחבורה חלקית מאינדקס m.
ב. תן דוגמא [redacted] של חבורה סופית ושל מספר m שמחלק את הסדר שלה ואין לה חבורה חלקית מסדר m.

3. אם a איבר בחבורה G המרכֵּז של a ב-G, $C_G(a)$, הוא קבוצת איברי G שמתחלפים עם a.
א. אם G סופית הראה שמספר הצמודים של a שווה לאינדקס $(G:C_G(a))$.
ב. מה המרכֵּז של (12345) ב-S_5? ב-A_5?
ג. הראה שהתמורות (12345) ו-(12354) צמודות ב-S_5 אך לא צמודות ב-A_5.

4. נסמן ב-$SL_2(\mathbb{F}_5)$ את חבורת המטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל השדה $\mathbb{F}_5$.
מצא חבורת 2-סילוב של $SL_2(\mathbb{F}_5)$, הראה שאינה אבלית ושיש לה רק איבר אחד מסדר 2.
הראה גם שחבורת 2-סילוב זו אינה דיהדרלית.

5. א. מה מספר החבורות האבליות (עד כדי איזומורפיזם) מסדר 10000?
ב. מה מספר החבורות החלקיות מסדר 10 בחבורה $\mathbb{Z}/(10)\times\mathbb{Z}/(10)\times\mathbb{Z}/(10)\times\mathbb{Z}/(10)$?

המשך

6. יהי F שדה ונסמן F^+ את החבורה האדיטיבית שלו (כלומר F עם פעולת החיבור בלבד.) תהי G חבורת G המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר $a,b,c\in F$, ביחס לפעולת כפל מטריצות.

א. הוכח שהמטריצות שבהן $b=0$ מהוות חבורה חלקית נורמלית, H, של G.

ב. הראה ש-H איזומורפית ל-$F^+\times F^+$.

ג. מצא חבורה חלקית K כך ש-$H\cap K=\{1\}$ ו-$HK=G$.

בהצלחה

אלגברה ב'-1, מועד ב' (7.9.97)

המורה: ל. רוון

משך המבחן: 3 שעות

ענה על <u>4 שאלות</u> (ולא יותר)

אין להשתמש בחומר עזר.

1. תהי D_n החבורה הדיהדרלית מסדר $2n$ (חבורת הסימטריות הסביבות של המצולע המשוכלל עם n קדקדים), עבור $n \leq 3$. מהו המרכז של D_n? מהי המנה של D_n מודולו המרכז?

2. ידוע שחבורה מסדר 8 איזומורפית לאחת מ-5 אפשרויות: דיהדרלית, קווטרניונים או אבלית. הראה שקבוצת המטריצות $\left\{ \pm I, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא <u>חבורה</u> ביחס לכפל מטריצות וקבע למי מ-5 האפשרויות היא איזומורפית.

3. אם G היא חבורת-p סופית הוכח: (א) שיש ל-G מרכז לא טריוויאלי, (ב) או ש-G קומוטטיבית או שהאינדקס של מרכזה לפחות p^2.

4. תהא G חבורה סופית, H חבורה חלקית <u>נורמלית</u> ב-G ו-K חבורה חלקית <u>שהסדר</u> שלה <u>זר</u> לאינדקס של H ב-G. הוכח ש-K מוכלת ב-H.

5. הוכח שבחבורה סופית G שתי חבורות p-סילו הן צמודות (אין צורך להוכיח קיום), ושמספרן $\equiv 1$ מודולו p.

6. תהי A החבורה <u>הכפלית</u> של המספרים הרציונליים שאינם אפס ו-B החבורה הכפלית של המספרים הרציונליים <u>החיוביים</u>. הוכח (א) A איזומורפית ל-$B \times \mathbb{Z}/(2)$, (ב) A <u>לא</u> איזומורפית ל-B.

<u>בהצלחה</u>

סמסטר קיץ
מועד א
תשנ"ח
1997/98

מבחן ב"אלגברה 1"

דר' אלכסס בלוזיאצקי.

חומר סגור

- משך הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות
- צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

פתור 4 מתוך 6 השאלות

1. G חבורה, H תת חבורה חלקית. הוכח את המשפט:
קבוצת הקוסטים (ימניים) של H ב G עם פעולת כפל קבוצות היא חבורה אם ורק אם H נורמלית.

2. G חבורה, $H<G$, $A=\{H, Ha, \dots\}$ קב' הקוסטים ימניים.
לכל $g\in G$ מתאימה פונקציה f_g

$$f_g : A \to A \qquad (Ha)f_g = Hag$$

א. הוכח כי התאמה זו מגדירה פעולה של G על A.
ב. נתון ש G אינסופית, $[G:H]$ סופי.
הוכח כי קיים $K<H$, כך ש $K \triangleleft G$.

3. מצא את כל התמורות ב S_n המתחלפות עם:

$$\sigma = (1,2)(3,4,5)(6,7,\dots,n)$$

4. G חבורת הפונקציות $f: R \to R$ מהצורה $ax+b$

H החבורה החלקית של הפונקציות $x+c$.

א. הוכח כי $H \trianglelefteq G$

ב. האם $H \times G/H$ (מכפלה ישרה) איזומורפית ל G? אם כן, הצג את האיזומורפיזם, אם לא, נמק מדוע לא.

5. G חבורה לא אבלית מסדר 8.

א. הוכח כי קיימת $H=\langle a \rangle$, ציקלית מסדר 4, $H \trianglelefteq G$

ב. הוכח כי אם $b \in G$, $b \notin H$ אז $b^2 \in H$

ג. הראה כי קיימות רק 2 חבורות לא אבליות מסדר 8.

6. א. הוכח: G מסדר p^α. המרכז Z של G שונה מ $\{e\}$.

ב. הוכח: חבורה מסדר p^2 אבלית.

בהצלחה!

מבחן באלגברה ב'-1, סמסטר קיץ מועד ק'.
מורים: רוסט, וסרמן (6.9.98).

ענה על 4 שאלות.
משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בחומר עזר.

1. רשום חבורת 2 סילום של S_4 וחבורת 3 סילום של S_6. בכל מקרה הוכח שקבלת חבורה.

2. הוכח שמכפלה של שתי חבורות ציקליות (לא טריויאליות) היא ציקלית אם ורק אם שתיהן סופיות והסדרים שלהן זרים.

3. תהי G חבורת כל הפונקציות הלינאריות $ax+b$, $a\neq 0$, מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$, ביחס לפעולת ההרכבה. הראה ש-G מכפלה $\frac{1}{2}$ ישרה של החבורה הכפלית $\mathbb{R}^{\times}$ ($=\mathbb{R}-\{0\}$ עם פעולת הכפל) והחבורה החיבורית $\mathbb{R}^{+}$ ($=\mathbb{R}$ עם פעולת החיבור).

4. נניח p,q מספרים ראשוניים שונים. (א) כמה חבורות אבליות (עד כדי איזומורפיזם) מסדר p^2q^3 יש? (ב) בכל אחת מהן מה מספר החבורות החלקיות מסדר pq?

5. הוכח שקיימת חבורה לא קומוטטיבית מסדר 8 שאינה איזומורפית לחבורה הדיהדרלית מסדר 8.

6. תהי $SL_2(\mathbb{F}_p)$ חבורת המטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל $\mathbb{F}_p$ (ביחס לכפל מטריצות). מה סדר החבורה? לכל ראשוני שמחלק את הסדר מצא חבורת סילוק מתאימה.

בהצלחה

22 בספטמבר 1993

מבחן באלגברה ב' 1

המרצה: אילן זיסר
משך הבחינה: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר
ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

1. בשאלה הזו $n\geq 5$ הינו מספר טבעי ו- S_n הינה החבורה הסימטרית ממעלה n.
א. (10 נקודות) מצא את כל החבורות החלקיות הנורמליות של S_n.
ב. (15) הוכח שאם $2<k<n$ אז אין ל S_n חבורה חלקית מאנדקס k.

2. (25) הוכח שכל חבורה מסדר p^3q אינה פשוטה כאשר p ו- q הינם מספרים ראשוניים.

3. אידאל M בחוג R נקרא **אידאל מקסימלי** אם $M\neq R$ ואם M לא מוכל בשום אידאל של R פרט ל- R עצמו.
א. (10) נסמן ב- R את חוג הפולינומים עם מקדמים מרוכבים ונסמן ב- M את קבוצת כל הפולינומים המתאפסים בנקודה 0. הוכח: M היא אידאל מקסימלי של R.
ב. (15) הוכח שאידאל I של חוג קומוטטיבי R הינו מקסימלי אם ורק אם חוג המנה R/I הינו שדה.

4. א. (10) הוכח שאם H הינה חבורה חלקית נורמלית של G ו- P היא חבורת סילו נורמלית של H אז P הינה חבורה חלקית נורמלית של G.
ב. (15) הוכח שאם G הינה חבורה סופית ולכל חבורה חלקית לא טריויאלית H של G מתקיים $N_G(H)>H$ אז כל חבורת סילו של G היא נורמלית.

5. א.(12) הוכח שלחבורת - p סופית קיימות חבורות חלקיות נורמליות מכל סדר המחלק את סדר החבורה.
ב.(13) הוכח שאם G הינה חבורת - p לא ציקלית אז $[G:G']\geq p^2$ כאשר G' היא חבורת הקומוטטור של G.

בהצלחה

כא באלול, תשנג
7 בספטמבר, 993

בחינה באלגברה ב1 - מועד ב

המורה: משה ירדן
משך הבחינה: 3 שעות
ענה על 4 מתוך 6 השאלות הבאות:

1. נסמן ב $K^{\times}$ את החבורה הכפלית של שדה K. הוכח שאם G היא תת חבורה סופית של $K^{\times}$ אזי G מעגלית.

2. הוכח שכל חבורה מסדר 65 היא מעגלית. רמז: השתמש במשפטי סילו.

3. תהי A חבורה אבלית סופית ויהי p מספר ראשוני. נסמן $A_p=\{a\in A|\ pa=0\}$. השתמש בהעתקה $a \longmapsto pa$ כדי להוכיח ש $|A_p|=|A/pA|$. הסק מכאן ש
$$\dim_{\mathbb{F}_p} A_p=\dim_{\mathbb{F}_p} A/pA$$

4. א. הוכח שכל חבורה מסדר 24 פתירה.
ב. תן דוגמה לסדרה נורמלית של S_4 שכל גורמיה חלופיים.

5. יהי $f\in K[X]$ פולינום אי פריק ממעלה n. בנה הרחבה L של K ממעלה n שבה יש ל f שרש.

6. תהי B תת חבורה של החבורה $A=Z/125Z\oplus Z/25Z\oplus Z/25Z$. הוכח באפן ישיר (כלומ בלי להסתמך על משפט החבורה החלקית) ש $B\cong\bigoplus_{i=1}^{3} Z/5^{l_i}Z$ באשר $l_1\leq 3$ ו $l_2, l_3\leq 2$.

מבחן באלגברה ב'-1 סמסטר קיץ תשנ"ב.
מועד א' (המורה: ש. גולד)

אין להשתמש בחומר עזר.
משך המבחן 3 שעות
ענה על **4** שאלות

בהצלחה

1. הגדר מכפלה ½ ישרה של חבורות והוכח: (א) החבורה הדיהדרלית מסדר 8 היא מכפלה כזו (באופן לא טריויאלי). (ב) החבורה של הקווטרניונים, Q_8, **אינה** כזאת.

2. הגדר את **הזוגיות** של תמורה והוכח שהיא מגדירה **הומומורפיזם** מחבורת התמורות S_n ל- $\{\pm 1\}$.

3. נניח A חבורה אבלית **סופית** ו-B חבורה חלקית שלה שהיא **ציקלית** שנוצרת על ידי איבר מסדר **מירבי** ב-A. (א) הוכח שלכל איבר ב-A/B יש נציג ב-A עם אותו סדר. (ב) הראה בדוגמא שאם מצמצמים את הנחת הסדר המירבי המסקנה בחלק (א) **לא** מתקיימת. (כלומר: מצא A שלה תת B ציקלית, כך של-A/B יש איבר x שלכל נציג שלו סדר שונה מהסדר של x).

4. נניח H חבורה חלקית מאינדקס 2 בחבורה סופית G. (א) הראה שלכל איבר של G מספר הצמודים ב-G **או שווה** למספר הצמודים ב-H **או כפול** ממנו. (ב) תן דוגמא לכל אחת מהאפשרויות.

5. בחבורה חופשית מדרגה 5, $\mathbb{Z}^5$, תהי A החבורה החלקית הנוצרת ע"י האיברים $(-7,0,9,30,11)$, $(2,6,18,42,2)$, $(7,6,-9,-36,-11)$, $(2,0,18,48,2)$. (א) מה הדרגה של A? (ב) מה המנה $\mathbb{Z}^5/A$? (כלומר רשום אותה כסכום ישר של חבורות ציקליות.)

6. תהי P חבורת p-סילו בחבורה G ו-$N(P) = \{x\in G : xPx^{-1}=P\}$. (א) הוכח ש-P היא חבורת p-סילו יחידה ב-$N(P)$. (ב) הוכח $N(N(P))=N(P)$. (ג) תן דוגמא של חבורה G וחבורת סילו P כך ש-$N(P)=P$ ודוגמא שבה $N(P)\neq P$.

אוניברסיטת תל אביב
מדעים מדויקים

מועד ב׳, סמ׳ ב׳ תשנ״א
3.9.91

בחינה באלגברה ב׳ 1

פרופ׳ א. קליין

ענה על 5 שאלות.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.
אין להשתמש בחומר עזר וכן לא במחשבונים.
בכל מקום האות G מסמנת חבורה.

1. תהי $G \rhd K$ ו-$[G:K]$ סופי. הוכח:
(א) אם $a\in G$ מסדר סופי, אזי הסדר של a הוא כפולה של הסדר של aK ב-G/K.
(ב) אם H חבורת-p חלקית ל-G, p ראשוני שאינו מחלק את $[G:K]$, אזי $H<K$.

2. תאר בניה של שדה בעל 27 איברים ומצא בו איבר מסדר 26 והוכח לכך.

3. G סופית, P חבורת p-סילו ב-G. הוכח כי $NN(P)=N(P)$.
(ב) הבא דוגמה לחבורה G וחבורה חלקית H כך שמתקיים $NN(H)\neq N(H)$.

4. יהי $r\le n$. חשב את מספר התמורות ב-S_n הצמודות לתמורה $\sigma=(12\cdots r)$ והוכח כי $\alpha\in S_n$ מתחלפת עם σ אם ורק אם $\alpha=\sigma^i\tau$ כאשר $i=0,1,\dots,r-1$ ו-$\tau\in S_n$ משאירה את $1,2,\dots,r$.

5. (א) G סופית ו-p ראשוני קטן ביותר המחלק את $|G|$. הוכח כי אם $G>H$ ו-$[G:H]=p$ אזי $G\rhd H$.
(ב) $|G|=pqr^2$ כאשר $3\le p<q<r$ ראשוניים. הוכח שאם $r>\frac{1}{2}(pq-1)$ אזי G מכילה חבורת r-סילו נורמלית, והסק כי G מכילה חבורה חלקית מסדר qr^2 שהיא נורמלית.

6. תהיינה $H_1,H_2 \lhd G$ וכן $G=H_1H_2$. הוכח: $G/(H_1\cap H_2)\simeq G/H_1\times G/H_2$.

7. אם G קומוטטיבית מסדר p^r, p ראשוני, ו-$x\in G$ איבר מסדר מקסימלי, $H=\langle x\rangle$, אזי אם yH מסדר p^t ב-G/H קיים $z\in G$ מסדר p^t המשתייך ל-yH.

בס"ד

כ"ד באלול ת
9.1989
מועד ב'
סמס, א'

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מבחן באלגברה ב I
לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג'
המורה: ד"ר דוד סודרי.

משך המבחן: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על **ארבע** מתוך כל השאלות הבאות.

1. א. תהי G חבורה ותהיינה H,K תת חבורות של G. נניח כי $K \lhd G$.
הוכח: (i) HK תת חבורה של G. (ii) $K \lhd HK$
(iii) $H \cap K \lhd H$
(iv) $HK/K \cong H/H\cap K$

ב. תהי G חבורה ותהיינה A,B תת חבורות נורמליות פתירות.
הוכח כי AB פתירה.

2. א. תהי G חבורה ציקלית מסדר m. יהי a יוצר של G.
הוכח כי a^l יוצר של G אם ורק אם $(m,l)=1$.

ב. תהי G חבורה ציקלית מסדר m. הוכח כי
$$Aut(G) \cong \mathbb{Z}_m^*$$

ג. תהי G חבורה ציקלית אינסופית. הוכח כי
$$Aut(G) \cong \mathbb{Z}_2$$

3. ענה על **שלוש** מתוך השאלות (א) - (ד)

א. תהי G חבורה מסדר 39, שאינה ציקלית. הוכח כי G אינה נילפוטנטית.

ב. תן דוגמא לחבורה שהיא פתירה אך אינה נילפוטנטית.

ג. הוכח כי חבורה מסדר 396 אינה פשוטה.

ד. תהי G חבורה סופית פשוטה. יהי F שדה ונניח כי קיים הומומורפיזם לא טריביאלי $\varphi: G \to F^*$. הוכח כי G ציקלית.

הפוך!

4. תהי G חבורה ותהי H תת חבורה מאינדקס סופי. הוכח H מכילה תת חבורה N המקיימת

(i) $N \lhd G$

(ii) $[G:N] < \infty$

5. תהי G חבורה קומוטטיבית סופית שאינה ציקלית. הוכח שיש מספר ראשוני p כך ש-G מכילה חבורה חלקית איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

6. א. תהי G חבורה ותהי K תת חבורה בת שני איברים הוכח כי $K < Z(G)$.

ב. הוכח כי עבור $n \geq 3$, $Z(S_n)=\{1\}$

ג. יהי $n \geq 5$. תהי K תת חבורה לא טריביאלית של S_n. הוכח כי אם $K \lhd S_n$, אז $K = A_n$.

בהצלחה!

מועד א'
סמסטר א' תשמ"

אונ' ת"א
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מבחן באלגברה ב I

לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג.

המורה: ד"ר דוד סודרי

משך המבחן: 3 שעות
אין להשתמש בכל חומר עזר.

חלק א' ענה על שתיים מהשאלות 1-4.

1. א. תהי G חבורה ציקלית מסדר n. ויהי a יוצר של G. הוכח כי a^l יוצר של G אמ"מ $(n,l)=1$.

ב. תהי G חבורה סופית מסדר n. נניח כי לכל מחלק d של n יש ל-G לכל היותר תת חבורה ציקלית אחת מסדר d. הוכח כי G ציקלית.

2. תהיינה G_1, G_2 חבורות, ויהי $\varphi: G_1 \to G_2$ הומומורפיזם. תהי H_1 תת חבורה נורמלית של G_1 אשר מכילה את $\ker\varphi$. הוכח כי $\varphi(H_1)$ נורמלית ב $\varphi(G_1)$ וכי קיים איזומורפיזם $G_1/H_1 \cong \varphi(G_1)/\varphi(H_1)$.

3. תהי G חבורה ו H תת חבורה של G. נגדיר $H_G=\{g\in G \mid x^{-1}gx\in H, \forall x\in G\}$

א. הוכח כי H_G היא תת החבורה הנורמלית (של G) הגדולה ביותר המוכלת ב-H.

ב. נסמן ב-$S(G/H)$ את חבורת הפונקציות ההפיכות על G/H. הוכח כי קיים שכון $G/H_G \hookrightarrow S(G/H)$.

4. יהי p ראשוני.

א. מצא חבורת p-סילו של S_p

ב. הוכח כי חבורת p-סילו של S_{p^2} איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$.

ג. נניח כי $2<p$. חשב (עד כדי איזומורפיזם) את חבורת p-סילו של S_{p^3}

חלק ב' ענה על חמשה מתוך שאלות הסעיפים של שאלה 5.

5. א. יהי F שדה. האם ניתן לשכן $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow F^*$? נמק.

ב. תהי G חבורה סופית. הוכח כי מספר האיברים של G שהם מסדר 5 הוא כפולה של 4.

ג. תהי G חבורה מסדר 26. נניח כי G אינה אבלית. הוכח כי $\cong D_{26}$:

ד. מצא את הגורמים האינוריאנטיים וכן את המחלקים האלמנטריים של החבורה $\mathbb{Z}_{48}\times\mathbb{Z}_{63}$.

בהצלחה!

ה. תהי G החבורה החלקית של $\mathbb{Q}$ אשר נוצרת ע"י הקבוצה $\{1, \frac{1}{5}\}$.
הוכח כי $G \cong \mathbb{Z}$.

ו. רשום את כל האיברים של $\mathbb{Z}_{30}$ שהם מסדר 30.

ז. יהי $\varphi: G_1 \to G_2$ אפימורפיזם (של חבורות). נניח כי G_1 פשוטה. הוכח כי φ איזומורפיזם.

ח. הוכח כי חבורה מסדר 132 אינה פשוטה.

חלק ג׳ ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 6,7.

6. תהי G חבורה.

א. הגדר מהן החבורות $Z(G)$ (המרכז של G), $Inn(G)$ (חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים של G)

ב. הוכח <u>כי</u> אם $G/Z(G)$ ציקלית אז G אבלית

ג. הוכח כי $Inn(G) \cong G/Z(G)$.

ד. הוכח כי אם G אינה אבלית אז $Aut(G)$ אינה ציקלית.

7. <u>הגדרה</u>: תהי G חבורה ! $G \gneq H$. נאמר כי H תת חבורה <u>מכסימלית</u> של G אם H אינה מוכלת בחבורה חלקית של G פרט ל G עצמה.

תהי G חבורה נילפוטנטית סופית.

א. הוכח כי תת חבורה מכסימלית של G היא נורמלית.

ב. הוכח כי לכל m המחלק את $|G|$ יש ל G תת חבורה מסדר m.

ג. נניח כי $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ כאשר $p_1, \dots, p_k$ ראשוניים שונים ! $r_1, \dots, r_k$ טבעיים. הוכח כי לכל i יש ל-G חבורה חלקית מאינדקס p_i, וכי חבורה זאת נורמלית.

<u>חלק ד׳</u> ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 8,9.

8. נגדיר $Q = \left\{ \pm I_2, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

א. הראה כי Q חבורה חלקית של $GL(2,\mathbb{C})$.

ב. הראה כי כל חבורה חלקית של Q היא נורמלית.

ג. האם $Q \cong D_8$? נמק.

ד. חשב את $Z(Q)$ והראה כי $Q/Z(Q) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

<u>הפוך</u>!

9. יהי p ראשוני. נגדיר $G = \{(x,a) \mid x \in \mathbb{Z}_p,\ a \in \mathbb{Z}_p^*\}$

את הפעולה

$$(x,a)\cdot(y,b) = (x+ay,\ ab)$$

א. הראה כי G חבורה. מהו הסדר של G?

ב. מצא חבורת p-סילו של G. כמה חבורות p-סילו יש ל G?

ג. הוכח כי G פתירה.

ד. הוכח כי לכל m המחלק את $|G|$ יש ל-G חבורה חלקית מסדר m.

בהצלחה!

וניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים
"ע ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר ב' תשמ"ז
14.7.87

אלגברה ב' 1

לתלמידי מתמטיקה שנים ב-ג

המורה: ד"ר י. הירשפלד

מס. ת.ז:______ ______ ______

שך הבחינה: 3 שעות.

ין להשתמש בכל חומר עזר.

נה על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת היא טיוטה בלבד.

מן נכונות בעגול או ב- ✓ . **שים לב:** אם יותר מתשובה אחת נכונה - סמן את כולן.

בנת השאלות היא חלק מהבחינה. במהלך הבחינה ייענו רק שאלות טכניות - לא שאלות הבנה.

ימונים קבועים: — G, H, K חבורות סופיות

p, q מספרים ראשוניים.

אלה 1

$f: G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ איזה מהבאים נכון:

- f הומומורפיזם שאינו איזומורפיזם.
- f איזומורפיזם
- f איזומורפיזם אם G קומוטטיבית.
- f איזומורפיזם רק אם G קומוטטיבית.
- אף אחד מהנ"ל.

אלה 2

G מסדר pq . סמן את הנכונים:

- אם המרכז אינו טריביאלי הרי G קומוטטיבית ואפילו ציקלית.
- תמיד המרכז לא טריביאלי אבל G לאו דוקא ציקלית.
- S_3 הוא דוגמה לא קומוטטיבית מסדר pq עם מרכז לא טריביאלי.
- אם יש שני אברים שאחד אינו חזקה של האחר המתחלפים בכפל הרי G קומוטטיבית.

2/...

שאלה 3

איזה מהבאים נכון:

א. $Ord(a)=Ord(a^{-1})$

ב. $Ord(ab)=Ord(ba)$

ג. $Ord(a^{-1}ba)=Ord(b)$

ד. $Ord(a)<Ord(a^2)$

ה. $Ord(a)>Ord(a^2)$

שאלה 4

איזה מהבאים הוא פעולה של G על G

א. $T_a(x)=xa$

ב. $T_a(x)=xa^{-1}$

ג. $T_a(x)=a^{-1}xa$

ד. $T_a(x)=x$

שאלה 5

F שדה, חיבור וכפל מוגדרים באופן טבעי על $F\times F$
איזה מהבאים נכון:

א. $F\times F$ שדה.

ב. $F\times F$ הוא חוג שאינו שדה.

ג. $\{(a,a) \mid a\in F\}$ הוא שדה.

ד. $\{(a,a) \mid a\in F\}$ הוא אידיאל.

ה. $\{(a,0) \mid a\in F\}$ הוא שדה.

ו. $\{(a,0) \mid a\in F\}$ הוא אידיאל.

שאלה 6

C חוג הפונקציות הרציפות מ- R ל- R. מגדירים $T(f)=\int_0^x f(t)\,dt$

איזה מהבאים נכון:

א. T הומומורפיזם של החבורה החיבורית C לתוך עצמה.

ב. T הומומורפיזם של החוג C לתוך עצמו.

ג. T הומומורפיזם של החוג C לחוג אחר.

ד. הגרעין של T הוא הקבוצה הבאה (השלם):

שאלה 7

$f: G \xrightarrow{\text{על}} H$ הומומורפיזם ו- K גרעינו. מה נכון:

א. יש איזומורפיזם h מ- H על חבורה חלקית G_1 של G כך ש- $h \circ f$ היא פונקצית הזהות.

ב. אם יש איזומורפיזם כזה הרי G_1 נורמלית ב- G.

ג. אם יש איזומורפיזם כזה הרי $G_1 \cap K = \{e\}$

ד. אם יש איזומורפיזם כזה הרי G סכום ישר של G_1 ו- K.

שאלה 8

ב- Z_8 תהי $\sigma(x) = x+4$ ו- $\tau(x) = 3 \cdot x$

א. רשום כמכפלת ציקלוסים זרים

$\sigma =$

$\tau =$

$\sigma \tau \sigma^{-1} =$

ב. החבורה הנוצרת על ידי σ ו- τ ב- S_8 היא:

1. קומוטטיבית
2. ציקלית
3. נורמלית
4. כל S_8
5. בת 4 אברים. (סמן את הנכונים)

שאלה 9

ב- S_4 יש:

__________ חבורות סילוב 3

__________ חבורות סילוב 2.

ב- A_4 יש

__________ חבורות סילוב 3

__________ חבורות סילוב 2.

שאלה 10

הצג את $U(21)$ כמכפלת ציקליות אי פריקות , חלקיות ל- $U(21)$

$U(21) = \{\quad\} \times \{\quad\} \times \{\quad\}$

שאלה 11

תהי G חבורה בת 55 אברים.

א. אם G קומוטטיבית יש בה ________ אברים מסדר 5

ב. אם G לא קומוטטיבית יש בה ________ אברים מסדר 5

שאלה 12

זמן בטבלה איזה חבורות יתכנו במספרים הבאים:

n	רק ציקליות	רק קומוטטיביות (אולי יותר מאחת)	קומוטטיבית אחת (ואולי גם אחרות)	אחר

בהצלחה!!!!

הפקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

מועד ב' סמסטר ב' תשמ"ז
27.9.87

אלגברה ב' 1
לתלמידי מתמטיקה שנים ב'-ג'
המורה: ד"ר הירשפלד

מס. ת.ז.: ____________

משך הבחינה 3 שעות.
אין להשתמש בחומר עזר.
ענה על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת היא טיוטה בלבד.
אם כמה תשובות נכונות סמן את כולן, גם אם אחת נובעת בבירור מהאחרת.

שאלה 1

G חבורה, $a,b\in G$, $Ord(a)=p$, $Ord(b)=q$.
$p\neq q$, p, q (ראשוניים)
סמן איזה נכון —

( ) א. אם $|G|=p\cdot q$ אז $G=\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle$
( ) ב. אם $|G|=p\cdot q$ ו G קומוטטיבית אז $G=\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle$
( ) ג. אם $|G|=p\cdot q$ אז G קומוטטיבית
( ) ד. אם $|G|=p\cdot q$ ו $ab=ba$ אז G ציקלית.
( ) ה. אם $G=\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle$ אז G קומוטטיבית.

שאלה 2

יהי $C=R^R$ חוג הפונקציות מהממשיים לממשיים עם חיבור וכפל רגילים.
סמן את הנכונים:

א. $\{f \mid f(2)=0\}$
ב. $\{f \mid f(x)=0 \quad 0\le x\le 1 \text{ לכל}\}$
ג. קבוצת הפונקציות הקבועות
ד. $\{f\cdot\sin x \mid f\in C\}$
ה. $\{f \mid 0\le x\le y\le 1 \rightarrow f(x)\le f(y)\}$
ו. $\{f\sin x+g\cdot\cos x \mid f,g\in C\}$

אחר	שדה	אידאל*

*כולל אידאל לא אמיתי.

ו. בסעיף ______ של שאלה 2 מצאנו אידאל I עבורו C/I
הוא שדה איזומורפי ל ______
ז. בסעיף ______ של שאלה 2 מצאנו אידאל I עבורו $C/I=\{0\}$

שאלה 4

סמן מה נכון:
יש הומומורפיזם חד ערכי מהחבורה החיבורית Z_n לחבורה החיבורית Z_k

( ) א. אם ורק אם n מחלק את k
( ) ב. אם ורק אם $n \le k$
( ) ג. אם ורק אם $n=k$
( ) ד. אם ורק אם יש הומומורפיזם מ Z_k <u>על</u> Z_n

שאלה 5

יהי K חוג כלשהו $b \in K$. נסתכל בהעתקה $T(x)=ab$.
איזה מהבאים נכון

( ) א. T הוא הומומורפיזם של החבורה החיבורית R
( ) ב. אם R קומוטטיבי T הוא הומומורפיזם של החוג R
( ) ג. אם R קומוטטיבי T הוא איזומורפיזם של החבורה החיבורית R
( ) ד. אם b הפיך T הוא פרמוטציה של R

שאלה 6

p מספר ראשוני , H ו H_1 חבורות חלקיות ב G ו H חבורת סילוב p . סמן מה נכון

( ) א. אם הן שוות מספר סם H_1 חבורת סילוב p

( ) ב. אם הן שוות מספר הן צמודות.

( ) ג. כל שתי חבורות צמודות הן שוות מספר.

( ) ד. כל שתי חבורות שוות מספר הן צמודות.

שאלה 7

תהי G חבורה שאינ ה קומוטטיבית.

איזה מהתנאים הבאים מבטיח ש G __אינה__ חבורה פשוטה.

( ) א. יש $f: G \to G$ איזומורפים שאיבו הזהות.

( ) ב. יש $f: G \to H$ הומומורפיזם ואברים $a,b,c \in G$ עבורם $f(a) = f(b) \neq f(c)$

( ) ג. ל G מרכז לא טריביאלי

( ) ד. ל G חבורה חלקית קומוטטיבית לא טריביאלית

( ) ה. G מכילה בדיוק 2 אברים מסדר 3.

שאלה -8-

זכור שחבורת הקומוטטור G' הוא החבורה הנוצרת ע"י כל האיברים מהצורה $aba^{-1}b^{-1}$.

איזה מהבאים הוא נכון

( ) א. $S_n' \subseteq A_n$

( ) ב. אם $5 \leq n$. $S_n' = A_n$

( ) ג. אם $5 \leq n$ $S_n' = A_n'$

( ) ד. $S_3' = A_3$

( ) ה. $A_3' = A_3$

( ) ו. $S_4' = A_4$

( ) ז. $A_4' = A_4$

שאלה 9

א. ב A_6 יש ________ פרמוטציות מסדר 2.

ב. ב A_6 יש ________ פרמוטציות מסדר 5.

ג. ב A_6 יש ________ פרמוטציות מסדר 6.

אלה 10

צג את $U(24)$ כמכפלת חבורות <u>אי פריקות</u>:

$U(24) = \{ \quad \cdot \quad \} x \cdots$

אלה 11

הי G בת 39 אברים

. אם יש אבר אחד מסדר 39 יש ______ אברים מסדר 39.

אם אין אבר מסדר 39 יש ______ אברים מסדר 3

(. זכור כי היחידה לא נכללת בספירה).

אלה 12

שלם את הטבלה

	255	455	655	855
' החבורות במספר זה איזומורפיות				
קומוטטיביות במספר זה איזומורפיות				
אחרת				

בהצלחה !!!!

אוניברסיטת ת"א

מועד א' תשמ"ז
סמסטר א' 25.2.87

אלגברה ב' 1

מרצה: אוזיקין

זמן הבחינה: שלוש שעות.
יש לענות על ארבע שאלות.

1. (א) תהי G חבורה לא קומוטטיבית. הוכח כי $G/Z(G)$ אינה ציקלית.

(ב) תהי G לא קומוטטיבית מסדר 105. מהו $|Z(G)|$? נמק!

2. (א) $E\supset F$ שדות ו- $u\in E$ אלגברי מעל F. הוכח כי הפולינום המינימלי של u מעל F אי פריק ומחלק כל פולינום המתאפס ע"י u.

(ב) $\bar{E}$ שדה בעל p^n איברים המכיל את $\mathbb{Z}_p$. הוכח שקיים פולינום $g(x)$ אי פריק ממעלה n מעל $\mathbb{Z}_p$ וכי $g(x)/x^{p^n-1}-1$.

3. (א) P חבורת p-סילו ב- G ו- $N(P)<H<G$. הוכח שאם עבור $x\in G$ מתקיים $x^{-1}Px<H$ אזי קיים $k\in H$ כך ש- $x^{-1}Px=k^{-1}Pk$ והסק ש- $x\in H$.

(ב) הפעל P על $X=\{xH/x\in G\}$ ע"י כפל והסק שמספר איברי X הוא מהצורה $1+pt$.

4. (א) תהי G חבורה סופית ו- $H,K<G$. הוכח כי
$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}.$$

(ב) אם לכל p ראשוני המחלק את G קיימת חבורת p-סילו המוכלת רק ב- H או ב- K, הוכח כי $G=HK$.

5. (א) F שדה סופי. הוכח שקיים מספר ראשוני p כך שכל איבר $0\neq$ ב- F הוא מסדר p בחבורה לחיבור.

(ב) הוכח שההעתקה $x\to x^p$ הוא אוטומורפיזם של F על עצמו. מהם האיברים הקבועים בהעתקה זו?

6. (א) הוכח ש- A_n נוצרת ע"י כל המחזורים באורך 3.

(ב) תהי $A_n\triangleright H$. הוכח שאם H מכילה מחזור באורך 3 ו- $n\geq 5$ אזי $H=A_n$.

יברסיטת תל-אביב
ולטה למדעים מדוייקים
ריימונד ובברלי סאקלר

מועד א' סמסטר א' תשמ"ה
8.2.85

אלגברה ב' 1
להלמידי מתימטיקה שנים ב-ג
המורה: פרופ' קליין

הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות
על 5 שאלות
השתמש בחומר עזר.

G חבורה ו- $a, b \in G$ איברים מתחלפים מסדרים r, s בהתאמה.
הוכח כי G מכילה איבר מסדר $[r, s]$.

אם F שדה סופי, הוכח כי F^* ציקלית.

2

G חבורה מסדר n, $H \lhd G$, $a \in G$ ו- $k \geq 1$ מינימלי
$a^k \in H$.

הוכח כי Ha איבר מסדר k ב- G/H והסק ש- k/n.
ר שאם $s \geq 1$ ו- $a^s \in H$, אזי k/s.
יס $n = 50$ ו- $a \notin H$, כלומר $k > 1$, הוכח כי $a^{21} \notin H$.

חבורה סופית, $H < G$ ו- $[G:H] = m$.

כח שאם $|G| \nmid m!$, אזי G מכילה חבורה חלקית נורמלית
טריויאלית.

כח שאם p ראשוני, $p/|G|$ ו- $p > m$, אזי G מכילה
ורה חלקית נורמלית לא טריויאלית.

שאלה 4

יהי E שדה סופי.

א. הוכח שקיים p ראשוני ו- n טבעי כך ש- $|E| = p^n$.

ב. הוכח כי הקבוצה E מתלכדת עם קבוצת כל שורשי הפולינום $x^{p^n} - x$.

שאלה 5

א. G חבורה. אם $H \lhd G$ ו- G/H קומוטטיבית, הוכח כי H מכילה את חבורת הקומוטטור G'.

ב. אם $H, K \lhd G$ חבורות סופיות מסדרים זרים וכן G/K, G/H קומוטטיביות, הוכח כי G קומוטטיבית.

שאלה 6

א. p, q מספרים ראשוניים, $p > q$, וכן $q \neq 2$ או $p \neq 3$.
הוכח כי $p \nmid q^2 - 1$ והסק ש- $1 + kp \nmid q^2$
אלא אם כן $k = 0$.

ב. תהי G חבורה מסדר p^2q^2 באשר p, q ראשוניים
ו- $p > q$. הוכח כי אם $P < G$ ו- $|P| = p^2$,
אזי $P \lhd G$ (דון בנפרד במקרה $q = 2$, $p = 3$).

שאלה 7

א. הוכח כי $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ איבר מסדר 12
ב- S_7.

ב. האם כל שני איברים מסדר 12 ב- S_7 צמודים? נמק טענתך

ג. הצבע ע׳ שני איברים מסדר 6 ב- S_7 שאינם צמודים.

אוניברסיטת ת"א

מועד ב' - ספטמבר
27.9.87, תשמ"ז

אלגברה ב' 1
פרופ' יו. קליין

הזמן: 3 שעות. יש לענות על 4 שאלות.

1. (א) G חבורה סופית, $K<G$, $H<K$ חבורת p-סילו של K. הוכח שקיימת חבורת p-סילו P של G כך ש- $H=P\cap K$.
(ב) האם נכון שמתוך $P\triangleleft G$ נובע $H\triangleleft K$?

2. (א) יהיו u,v אלגבריים מעל $\mathbb{Q}$ ממעלות r,s בהתאמה. אם $(r,s)=1$ הוכח כי $\{u^i v^j\}$, $0\le i\le r-1$, $0\le j\le s-1$, בסיס של $\mathbb{Q}[u,v]$ מעל $\mathbb{Q}$.
(ב) אם $u\in\mathbb{R}$ שורש של x^3-x^2+3x+6 הראה כי $(u^2+3u-2)\sqrt{3}+2u^2-u$ אינו רציונלי.

3. (א) תהי חבורה סופית. הוכח: אם היא קומוטטיבית, אזי היא המכפלה הישרה של חבורות הסילו שלה.
(ב) האם המשפט ההפוך נכון?

4. (א) בנה שדה סופי אשר מספר איבריו 343.
(ב) כמה איברים בשדה שבנית מקיימים את המשוואה $x^{570}=1$?

5. יהי G חבורה שבה מתקיים $(ab)^6=a^6b^6$ לכל $a,b\in G$.
(א) הוכח כי $H=\{x^6|x\in G\}$ ו- $K=\{y\in G|y^6=1\}$ הן חבורות חלקיות נורמליות.
(ב) אם G סופית הוכח כי $|G|=|H||K|$ אך בדוק או הפרך ש- $H\cap K=\{1\}$.

6. יהי $\Phi_n(x)$ הפולינום הציקלוטומי ה-n-י.
(א) הוכח כי $$x^n-1=\prod_{d/n}\Phi_d(x)$$
(ב) חשב את $\Phi_{11}(x)$ ואת $\Phi_{12}(x)$.

מועד א' תשמ"ו
סמסטר ב' 20.6.86
מספר ת.ז. ______________

אלגברה ב' 1
פרופ' א. קליין

הבחינה מורכבת משני חלקים

חלק א'

הזמן המוקצב: שעה ורבע
אין להשתמש בחומר עזר
בכל שאלה יש לסמן באופן ברור את התשובה הנכונה
סימון נכון מקנה 5 נקודות
סימון מוטעה גורע 2 נקודות
שאלה ללא סימון או עם יותר מסימון אחד 0 נקודות
יש להתיחס אל 10 מתוך 12 השאלות הבאות. במידה ותהיה התיחסות אל יותר שאלות ילקחו בחשבון 10 הראשונות שסומנו.

G מסמנת חבורה
$Z(G)$ המרכז של G
$N(H)$ הנורמליזטור של H ב-G

בהצלחה

1. מספר איברי S_7 המתחלפים עם $(123)(45)$ הוא:

א. 24

ב. 16

ג. 12

ד. 8

2. G מסדר אי-זוגי, $H<G$ מאינדקס 3. אזי

א. H בהכרח קומוטטיבית

ב. $N(H)=G$

ג. $Z(G)>H$

ד. אם $H \triangleleft G$ אזי $Z(G)<H$

3. מספר החבורות הקומוטטיביות מסדר $2^4 3^6 5^2$ הוא:

א. 175

ב. 165

ג. 150

ד. 210

4. R חוג עם 1 ו-I אידיאל ב-R

א. אם R/I שדה אזי I מקסימלי

ב. אם I מקסימלי אזי R/I שדה

ג. אם R קומוטטיבי אזי R/I שדה

ד. אם R/I שדה אזי R קומוטטיבי

5. המספר היחיד הוא יוצר של $U(50)$

א. 11

ב. 29

ג. 31

ד. 33

6. $H,K<G$ וכן $HK=KH$ אזי $H \triangleleft HK$ בתנאי ש-

א. $H<N(K)$

ב. $K \triangleleft G$

ג. H ו-K קומוטטיביות

ד. $K<N(H)$

7. F שדה בן 64 איברים. מספר הפתרונות של $x^{27}=1$ ב-F הוא:

א. 1

ב. 27

ג. 3

ד. 9

8. $P_1,P_2<G$ חבורות p-סילו שונות (אותו p). אזי

א. $P_2N(P_1)\neq N(P_2)P_1$

ב. $P_1\cap P_2\neq 1$

ג. $N(P_1)\cap N(P_2)\neq 1$

ד. $N(P_1)\neq N(P_2)$

9. הפולינום הציקלוטומי $\Phi_{15}(x)$ שווה ל-

א. $x^8 - x^7 + x^5 - x^3 + x^2 - x + 1$

ב. $x^8 - x^7 + x^6 - x^4 + x^2 - x + 1$

ג. $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$

ד. $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^2 - x + 1$

10. $u \in \mathbb{R}$ מקיים $u^3 - u^2 + 1 = 0$ אזי $7(u^2 - 4u + 5)^{-1}$ שווה ל-

א. $u^2 + u + 1$

ב. $u^2 + u - 1$

ג. $u^2 - u - 7$

ד. $u^2 - u + 1$

11. G לא קומוטטיבית מסדר 385 ו- $Z(G) \neq 1$, אזי $|Z(G)|$ שווה ל-

א. 11

ב. 7

ג. 35

ד. 5

12. $u \in \mathbb{R}$ מקיים $u^3 = 2$ אזי $\mathrm{Irr}(u^2+1, \mathbb{Q})$ שווה ל-

א. $x^3 - 2x^2 + 2x - 6$

ב. $x^3 - 3x^2 + 3x - 6$

ג. $x^3 - 3x^2 + 3x - 5$

ד. $x^3 - 2x^2 + 2x - 5$

מועד א' תשמ"ו
סמסטר ב' 20.6.86
מספר ת.ז. ____________

אלגברה ב' 1
פרופ' א. קליין

חלק ב'

הזמן המוקצב: שעה וחצי. אין להשתמש בחומר עזר.
ענה על שאלה ראשונה (25 נק') ועל אחת מבין שתי השאלות הנותרות (25 נק').

1. G חבורה סופית, p ראשוני, $p/|G|$. הוכח כי מספר חבורות p-סילו ב-G הוא מהצורה $1+pt$.

2. א. P חבורת p-סילו ב-G ו-$x\in G$ איבר מסדר $p^s m$, $p\nmid m$. הוכח כי p^s מחלק את האקספוננט של P.
ב. $|G|=p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$, P_i חבורת p_i-סילו, $i=1,\ldots,k$. הוכח כי האקספוננט של G שווה למכפלת האקספוננטים של כל ה-P_i.

3. א. יהיו p,q ראשוניים. הוכח שאם $3\leq p<q$ וכן $1+qt/p^3$ אזי או $t=0$ או $1+qt=p^3$.
ב. הוכח שכל חבורה מסדר p^3q, p,q ראשוניים, אינה פשוטה (רצוי לדון בנפרד במקרה $p=2$).

יז בחשון, תשמו

1 באוקטובר, 1985

מבחן באלגברה 21

מועד מיוחד

המורה: משה ירדן.

הזמן: שלש שעות.

ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות.

1. הוכח שכל חבורה חלופית נוצרת סופית A ניתנת להצגה בצורה

$$A = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^r$$

כאשר r הוא הדרגה של A ו $p_1,\dots,p_m$ הם מספרים ראשוניים. CL3

באופן מדויק את משפטי העזר שאתה משתמש בהם בהוכחה.

2. נניח. $N, H_1,\dots,H_r$ חבורות חלקיות נורמליות של חבורה G.
נניח ש $G = H_1\cdots H_r$ ו $N\cap H_i = 1$ עבור $i=1,\dots,r$. הוכח ש N מוכל במרכז של G.

3. יהי σ איבר בחבורה הסימטרית S_n. נסמן ב $\langle\sigma\rangle$ את החבורה הנוצרת על ידי σ. נניח ש $\langle\sigma\rangle$ פועלת באופן טרנזיטיבי על הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ (כלומר לכל i ו j, $1\le i,j\le n$, קיים k כך ש $i^{\sigma^k}=j$). הוכח ש σ הנו מחזור מארך n.

4. נסח והוכח את משפט האיזומורפיזם השלישי של תורת החבורות.

5. הוכח שאם N הוא חבורה חלקית נורמלית של חבורה סופית G ו P הוא חבורת סילו-p של N אזי $G = N\cdot N_G(P)$. רמז: כל שתי חבורות סילו-p של N צמודות זו לזו על ידי איבר של N.

יב בתשרי, תשמו
27 בספטמבר, 1985

מבחן באלגברה ב1
מועד ב

הזמן: שלש שעות.

המורה: משה ירדן.

ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות.
הוראות: ללא חומר עזר

1. נתבונן במכפלה הישרה $G=H_1\times H_2\times\cdots\times H_n$ של חבורות. תהי N תת חבורה נורמלית של G המקיימת $N\cap H_i=1$ עבור $i=1,\dots,n$. הוכח כי N מוכל במרכז של G.

2. הוכח שכל חבורה G מסדר 36 פתירה.

3. תהי G חבורה סופית. הוכח את הנוסחה

$$|G|=|Z|+\sum_{c\in C'}(G:Z(c))$$

כאשר C' הנה מחלקת מיצגים של מחלקות צמידות שאינן שייכות למרכז, Z המרכז של G ולכל $c\in C'$, $Z(c)$ הנו המְרַכֵּז של c.

4. תהי G חבורה סופית ויהי p מספר ראשוני. הוכח שמספר חבורות סילו-p של G קונגרואנטי ל 1 מודולו p.

5. תהי U החבורה החלופית החפשית מדרגה n. הוכח שכל תת חבורה V של U הנה חפשית ודרגתה אינה עולה על n.

ג' באב, תשמ"ה
21 ביולי, 1985

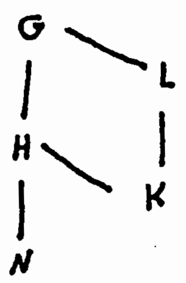
מבחן באלגברה ב1

המורה: משה ירדן

הזמן: 3 שעות.

פתור 4 מתוך 5 הבעיות הבאות:

1. בתרשים החבורות



נתון ש $N \triangleleft G$, $K \triangleleft L$, $G = NL$ ו $H = NK$.
הוכח ש $H \triangleleft G$.

2. א) הוכח שהמרכז של חבורת-p סופית G אינו טריויאלי.
ב) הסק שכל חבורה מסדר p^2 הינה חלופית.

3. יהי π איבר ב S_{17} מסדר 17. הוכח ש π נתן להצגה כמחזור מאורך 17.

4. יהי p מספר ראשוני. נתבונן בחבורה $A = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z}$
כאשר $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_l > 0$ ותת חבורה B. נניח ש
$B \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/p^{\beta_i}\mathbb{Z}$ כאשר $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_k > 0$. הוכח ש $k \leq l$.

5. הוכח שכל חבורה מסדר 75 הינה פתירה.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

ענה על 5 מתוך ה־10 השאלות הבאות. אין חומר עזר.
נא לענות לא יותר מ־5 שאלות.

<u>אלגברה ב 4, סמסטר ב תשמ"ג (בורשטיין), מועד ~~שלם~~ ב'</u>

הראה שבחבורה $H\times G$ הסדר של (h,g) הוא הכפולה המשותפת המינימלית של $\mathrm{Ord}(g)$ ו־$\mathrm{Ord}(h)$.

הראה שאם H ו־K חבורות חלקיות נורמליות ב־G הרי $H\cap K$ חבורה חלקית נורמלית. תן דוגמה ש־$H\cup K$ איננה חבורה.

יהי $k\in\mathbb{Z}_n$. הראה שאם k זר ל־n הרי k הפיך.

הוכח שאם כל איבר ב־G מסדר 2 הרי G קומוטטיבית.

$R_{2\times2}$ חוג המטריצות מסדר 2×2 מעל הממשיים. הראה שההעתקה $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=a$ היא הומומורפיזם של החבורה החיבורית אבל לא של החוג.

הגדר מהי פעולה של חבורה על קבוצה, ומהו מסלול של איבר. הוכח ששני מסלולים נחתכים הם מתלכדים.

הוכח שאם כל סדרי איברי H ו־G/H הם מספרים שהם חזקות של 7 אז גם סדרי איברי G הם מספרים שהם חזקות של 7 (אם אתה משתמש על משפט Cauchy דומה למספרים ראשוניים כלשהם — הוכח אותו תחילה).

$X=\{1,i,-1,-i\}$. ב־S_X תהי σ_1 הפרמוטציה הכפלה כל איבר ב־i ותהי σ_2 הפרמוטציה העלאה כל איבר בחזקה שלישית.
כתוב את σ_1,σ_2 כמכפלת ציקלוסים זרים.