מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 4

שאלה 1

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים $-\infty < i < +\infty$. מתקיים: $X_0 = 0$
ולכל $n \geq 0$: $X_{n+1} = X_n + b_n$, כאשר b_n הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים
$P(b_n = +4) = \frac{1}{5}$ ו $P(b_n = -1) = \frac{4}{5}$; זאת אומרת שבכל שלב בסכוי $\frac{1}{5}$ עושים ארבעה צעדים ימינה ובסכוי $\frac{4}{5}$ עושים צעד אחד שמאלה.

א. מהו המחזור של מצבי השרשרת ?
ב. הוכיחו שכל המצבים הם נשנים.

(רמז: תוכלו אם תרצו, להעזר בנוסחת סטרלינג: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.)

שאלה 2

תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:
$P(X_i = 1) = \frac{1}{5}$, $P(X_i = 0) = \frac{4}{5}$ לכל $i \geq 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים $X_1, X_2, X_3, \cdots$.

א. הראו שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$ עבור איזשהו n טבעי.
ב. הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$, אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.
ג. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ $\frac{1}{5}$ לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.
ד. הראו שהמנה $\frac{1}{5}$ תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1 .
(רמז: תוכלו להסתמך על הטענה שהיה צריך להוכיח בסעיף ב' משאלה 1 וזאת גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה.)
ה. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.
ו. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

המשך בעמוד הבא

שאלה 3

נתונה P - מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב בלתי פריקה ובלתי מחזורית.

האם בהכרח קיים מספר טבעי n כך שכל אברי המטריצה P^n הם כולם חיובים ?

א. כאשר לשרשרת יש מספר סופי של מצבים.

ב. כאשר לשרשרת יש מספר בן מניה של מצבים.

שאלה 4

נתונה שרשרת מרקוב על קבוצת המצבים $I = \{0,1,2,\cdots\}$ והסתברויות מעבר הנתונות על-ידי:

$P_{0,j} = \alpha_j$ עבור $j = 0,1,2,\cdots$ כאשר $a_j \geq 0$ לכל $j \geq 0$ ו $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = 1$ ו $P_{i,i-1} = 1$ עבור כל $i > 0$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו אם קיימת סדרה של ערכים α_j כך שהשרשרת מקיימת את התכונה הרשומה. אם קיימת סדרה כזאת אז הביאו דוגמא מתאימה. אם לא קיימת אז נמקו זאת.

א. שרשרת בה מצב 0 הוא חולף.

ב. שרשרת בה מצב 0 הוא לא מחזורי (בעל מחזור 1).

ג. שרשרת בה המחזור של מצב 0 הוא 3.

ד. שרשרת בה מצב 8 הוא חולף.

שאלה 5

נתונות שתי מטריצות מעבר P,Q של שרשרות מרקוב בלתי פריקות ולא מחזוריות בעלות אותו מספר מצבים.

האם גם המטריצה $\frac{1}{2}(P+Q)$ היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב בלתי פריקה ולא מחזורית ?
