

מבוא לתהליכים סטוכסטיים / תרגיל 5

חשוב מאוד לפתור את שאלות 1 ו 2 גם אם אין לכם זמן לפתור את כל השאלות.

שאלה 1

נתונה שרשרת מרקוב בעלת קבוצת מצבים שהם השלמים האי-שליליים. נניח שמתקיים $P_{0,i} = 0.5^{i+1}$ עבור כל $i \geq 0$ ומתקיים $P_{i,i-1} = 1$ עבור כל $i \geq 1$. האם מצב 0 הוא נשנה חיובי?

שאלה 2

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של מטבע שעל שעל צד אחד שלו רשום 2 ועל הצד השני רשום 4. יהי S_n הסכום המצטבר ב n ההטלות הראשונות. יהי Z_n שארית החלוקה של S_n ב 3. נסתכל על שרשרת מרקוב $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2\}$.

א. מצאו את מטריצת המעבר של השרשרת $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$? האם השרשרת הזאת היא פריקה?
ב. מהו המחזור של מצבי השרשרת?
ג. האם הוקטור הזה הוא וקטור סטציונרי יחיד של השרשרת?
ד. הסיקו מהי ההסתברות הגבולית של המאורע ש S_n הוא כפולה שלמה של 3.
ה. הסיקו מהי תוחלת זמן החזרה מהמצב שבו $(Z_n = 0)$ לעצמו.

שאלה 3

יהי i - מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה.
יהי a - המחלק המשותף המכסימלי של כל המספרים n , המקיימים $P_{i,i}^{(n)} > 0$.
יהי b - המחלק המשותף המכסימלי של כל המספרים n , המקיימים $f_{i,i}^{(n)} > 0$.

א. תנו נימוק מילולי קצר לכך שתמיד $b \geq a$. (רמז: קבוצה אחת מכילה את האחרת).
ב. הראו שאם מתחילים במצב i אז ניתן לבקר בו רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה שלמה של b .
ג. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $a = 1$ אז גם $b = 1$.
ד. הסיקו שניתן לאפיין אי מחזוריות בשני אופנים.

שאלה 4

היזכרו בטיעונים שנתנו לכך שההילוך המקרי התלת מימדי הוא חולף.

א. מבין $2n$ הצעדים הראשונים, מהי תוחלת מספר הצעדים שבהם הלכנו במימד ימין שמאל?
ב. מי מבין שתי הטענות הבאות נכונה? נמקו את תשובתכם.
I. נזקקנו לחוק החזק כדי להראות שאינסוף פעמים תהיה פרופורצית המהלכים בכל מימד שווה לפחות לרבע מכלל המהלכים המצטברים.
II. נזקקנו לחוק החזק כדי להראות שרק במספר סופי של פעמים תהיה פרופורצית המהלכים בלפחות מימד אחד קטנה מרבע כלל המהלכים המצטברים.

ג. נניח שעד השלב ה- 100 הלכנו במימד הראשון 40 צעדים, במימד השני 30 צעדים ובמימד השלישי 30 צעדים, מהי במקרה זה ההסתברות שבשלב ה- 100 אנו בראשית?
ד. נניח שעד השלב ה-100 הלכנו במימד הראשון 40 צעדים, במימד השני 31 צעדים ובמימד השלישי 29 צעדים, מהי במקרה זה ההסתברות שבשלב ה-100 אנו בראשית?
ה. איך מסתדרת לכם התוצאה של סעיף ד' עם רעיון ההסבר כולו?