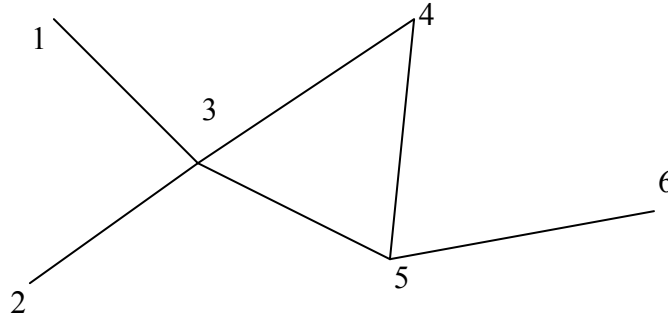


מבוא לתהליכים סטוכסטיים / תרגיל 7

שאלה 1

נתונה שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על הגרף בעל קבוצת הצמתים $\{1,2,3,4,5,6\}$.



כאשר נמצאים בצומת מסוים, אז עוברים לאחד הצמתים השכנים לו. נניח שמתחילים בצומת 1, מצאו את תוחלת הזמן עד חזרה ראשונה לצומת 1. רמז: אם תתבססו על מה שנלמד בכיתה אז לא תזדקקו כמעט לחישובים.

שאלה 2

בהרצאה דברנו על הילוך מקרי של פרש או של מלך על לוח שחמט תקני 8×8 . הראנו איך לחשב את תוחלת מספר הצעדים עד חזרה מפינה לאותה פינה. ניתן לבחור סדרת קבועים $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שעבור לוח שחמט של $n \times n$ משבצות, תוחלת זמן החזרה של מלך מפינה לאותה פינה היא $c_n n^2$. הראו שהסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפת לגבול. מצאו את גבול זה.

שאלה 3

בתהליך הסתעפות מספר הצאצאים Z של פרט בודד מפולג לפי

$$P(Z=2) = \frac{2}{3} \quad P(Z=0) = \frac{1}{3}$$

- א. בהינתן $X_0 = 1$, מצאו את ההסתברות להיכחדות.
- ב. בהינתן $X_3 = 2$, מצאו את ההסתברות להכחדות.
- ג. בהינתן $X_0 \sim U(2,5)$, מצאו את ההסתברות להכחדות.
- ד. בהינתן $X_3 = 2$, מהי התוחלת של X_5 ?

שאלה 4

באי מסוים יש 10^6 תושבים. אחד מתושבי האי מספר לתושב אחר בדיחה. כל אדם ששומע את הבדיחה לא מספר אותה לאף תושב בסיכוי $\frac{1}{6}$, מספר אותה לתושב אחד בסיכוי $\frac{1}{2}$, מספר אותה ל 50 תושבים

בסיכוי $\frac{1}{12}$ ומספר אותה ל 100 תושבים בסיכוי $\frac{1}{4}$. בכל מקרה שתושב מספר את הבדיחה שומעו נבחרים באקראי מבין כל תושבי האי הכוללים את אלה שכבר שמעו אותה ואת אלה שעדיין לא שמעו אותה.

מהי בקירוב ההסתברות שמי ששמע ראשון את הבדיחה ישמע אותה שוב באיזשהו שלב? הערה: בשאלה זו אני מצפה לתשובה סופית, להסבר הגיוני ולנימוק טוב. אך אני לא מצפה להוכחה.