

## פתרון תרגיל 10 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

### שאלה 1

כל המצבים מהווים מחלקה אחת בלתי פריקה של מצבים ארגודים. מטריצת המעבר בזמן הקפיצות היא של הילוך מקרי לא סימטרי שבו בכל שלב בהסתברות 0.7 הולכים ימינה ובהסתברות 0.3 הולכים שמאלה. ראינו בשלב מוקדם של הקורס שבהילוך זה כל המצבים הם חולפים. לכן בתהליך המתואר בשאלה לא נחזור בודאות למצב ההתחלתי באף זמן קפיצה. לכן המצבים הם חולפים.

### שאלה 2

- א. עבור כל  $i \geq 0$  :  $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$  ו  $\Lambda_{i,i} = -\lambda$ . יתר אברי היוצר הם אפס.
- ב. עבור כל  $i \geq 1$  :  $-\lambda\pi_i + \lambda\pi_{i-1} = 0$ .
- ג. המשוואות גוררות ש  $\pi_i = \pi_j$  עבור כל  $i \neq j$ . אם היה מתקיים שהקבוע שאליו כל אחד מהם שווה הוא חיובי ממש, אז סכום רכיבי הוקטור היה שווה לאינסוף. בוקטור סטציונרי סכום הרכיבים צריך להיות שווה ל 1.

### שאלה 3

א. נרשום מערכת לחישוב הוקטור הסטציונרי:

$$\begin{cases} -4\pi_1 + 4\pi_2 + 4\pi_3 = 0 \\ 3\pi_1 - 7\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 3\pi_2 - 5\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל פתרון  $\pi_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\pi_2 = \frac{1}{4}$ ,  $\pi_3 = \frac{1}{4}$

- ב. עוצמת המעברים ממצבים 2 ו 3 למצב 1 הם זהים. לכן לגבי הסתברויות המעבר למצב 1, ניתן להסתכל על שרשרת מצומצמת שבה מצבים 2 ו 3 מכווצים למצב בודד. היוצר של שרשרת זו הוא:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

בכיתה ראינו פיתוח כללי של הסתברויות המעבר בשרשרת בעלת שני מצבים. לגבי שרשרת עם יוצר

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

מתקבלת הסתברות מעבר  $P_{1,1}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$

לכן כאן  $P_{1,1}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-8t}$ .

ג. מתקיים  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-8t} \right) = \frac{1}{2}$  וזאת ההסתברות הסטציונרית של מצב 1 שאותה חישבנו בסעיף הראשון.

---

#### **שאלה 4**

בתהליך פואסון, ההסתברות לאירוע בקטע זמן באורך  $h$  היא בסדר גודל של  $h$ . כך בהתפלגות מעריכית, ההסתברות לקבל ערך קטן מ  $h$  היא בסדר גודל של  $h$ . כדי שסכום שני משתנים יקבל ערך קטן מ  $h$ , צריך כל אחד מהם לקבל ערך קטן מ  $h$ . בגלל האי תלות יש לזה הסתברות שהיא בסדר גודל של  $h^2$ . זו לא הסתברות לקפיצה בתהליך פואסון ולכן היא לא מתאימה להתפלגות מעריכית.

---

שלומי