

## פתרון תרגיל 11 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

### שאלה 1

יהי  $y(t)$  - תוחלת מספר הפרטים בזמן  $t$ .

$$y'(t) = \lambda - \mu y(t)$$

הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + ce^{-\mu t}$$

כדי לעמוד בתנאי ההתחלה שהוא  $y(0) = 1$  צריך להתקיים:

$$c = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$$

ולכן נקבל פתרון

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} e^{-\mu t}$$

### שאלה 2

א. לגבי כל מלך, יש כאן הילוך מקרי לא מחזורי על הלוח. להילוך זה יש התפלגות סטציונרית. סכום הדרגות בלוח הוא  $a = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \cdot 8$ . ההסתברות הסטציונרית של משבצת פינתית

מסוימת היא  $\frac{3}{a}$ , של משבצת דופן שאינה פינתית  $\frac{5}{a}$  ושל משבצת פנימית  $\frac{8}{a}$ .

מכיון שאין תלות בין המלכים השונים אז משבצת פנימית מסוימת תישאר ריקה בתקופה מאוחרת בהסתברות מקורבת של  $\left(\frac{a-3}{a}\right)^{64}$ , משבצת דופן שאינה פינתית תישאר ריקה בהסתברות מקורבת

של  $\left(\frac{a-5}{a}\right)^{64}$  ומשבצת פנימית בקירוב  $\left(\frac{a-8}{a}\right)^{64}$ .

תוחלת מספר הריקות תשאף ל  $4 \cdot \left(\frac{a-3}{a}\right)^{64} + 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{a-5}{a}\right)^{64} + 6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{a-8}{a}\right)^{64}$

ב. כאן לגבי כל מלך יש גם 64 מצבים, אך לגבי כל מלך המחזור של השרשרת הוא 2. בזמן מסוים קבוע, רק 32 מלכים יכולים להיות במשבצת מסוימת (יש שתי קבוצות של 32 משבצות).

התוחלת תשאף ל  $4 \cdot \left(\frac{a/2-2}{a/2}\right)^{32} + 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{a/2-3}{a/2}\right)^{32} + 6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{a/2-4}{a/2}\right)^{32}$

כאשר סכום הדרגות מקיים  $a = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 4$ .

ג. יש התפלגות קבועה שווה של זמן השהות בכל מצב. בכל זמן אפשר לעבור מכל מצב לכל מצב. כאן כל מלך יכול להגיע מכל משבצת לכל משבצת בכל זמן. לכן אין חלוקה של המשבצות לשתי קבוצות. התוחלת היא:

כאשר  $a = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 4$   $4 \cdot \left(\frac{a-2}{a}\right)^{64} + 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{a-3}{a}\right)^{64} + 6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{a-4}{a}\right)^{64}$