פתרון תרגיל 5 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

ממצב 0 עוברים למצב i בהסתברות 0.5^{i+1} ואז יש מהלך אחד למצב i ו i מהלכים בחזרה ובסך הכל $i+1$ מהלכים. תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא $\sum_{i=0}^{\infty} 0.5^{i+1}(i+1)$. ההסתברות שמספר הצעדים עד חזרה יהיה $i+1$ היא 0.5^{i+1} ולכן מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 מתפלג $G(0.5)$ ולכן הוא בעל תוחלת 2. נעזרנו בתוצאה ידועה לגבי חישוב תוחלת של משתנה מקרי כדי לסכם טור.

אלטרנטיבית אפשר היה להשתמש בקריטריון להתכנסות טור.

מכיון שתוחלת זמן החזרה למצב 0 מעצמו היא סופית אז הוא מצב נשנה חיובי.

למעשה למצב 0 יש הסתברות סטציונרית $\frac{1}{2}$.

שאלה 2

א. תהי p - ההסתברות לקבלת תוצאה 2 בהטלה בודדת.

שימו לב שלא הנחנו שהמטבע הוגן. לכן נפתור עבור p כללי שבקטע הפתוח שבין 0 ל 1.

שימו לב שאם $p=0$ או $p=1$, אז השרשרת אינה בלתי מחזורית ולכן הטיעונים שבהמשך בסעיף ו' על קיום הסתברויות גבוליות אינם תקפים.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$$

ב. מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (בלכל היותר שני צעדים). לכן השרשרת היא בלתי פריקה.

ג. מכל מצב ניתן לחזור לעצמו בשני צעדים וניתן לחזור אליו גם בשלושה צעדים. לכן המחזור הוא 1.

ד. וקטור סטציונרי מקיים

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} .$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

מפתרון המערכת מתקבל וקטור סטציונרי $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. שימו לב שזהו הפתרון עבור כל $0<p<1$.

ה. במחלקה בלתי פריקה אין יותר מוקטור סטציונרי יחיד. זה מתקבל גם משיקולים אלגברים כי אין פתרון נוסף למערכת.

ו. בשרשרת בלתי פריקה נשנית חיובית ולא מחזורית זאת היא ההסתברות הסטציונרית של המצב 0 שהיא $\frac{1}{3}$.

ז. מתקיים $\pi_0=\frac{1}{E_0}$. לכן תוחלת הזמן עד חזרה למצב 0 לאחר שמתחילים בו היא 3.

שאלה 3

א. קבוצת המספרים $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$ מוכלת בקבוצת המספרים $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$
(אם ניתן להגיע לראשונה לאחר מספר צעדים מסוים אז כמובן ניתן גם להגיע לאחר מספר צעדים זה, כי הגעה ראשונה היא מקרה פרטי של הגעה). כל מחלק משותף של הקבוצה $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$ הוא גם מחלק משותף של קבוצה מצומצמת יותר של מספרים. לכן המחלק המשותף המכסימלי של הקבוצה $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$ הוא גם מחלק משותף של הקבוצה $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$. המחלק המשותף המכסימלי בקבוצה $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$ שווה לפחות לו (מכיון שהוא אחד המחלקים המשותפים).

ב. בין כל שני ביקורים עוקבים במצב עובר זמן שהוא כפולה שלמה של b (כל ביקור הוא הראשון אחרי הביקור הקודם). לכן הזמן עד כל ביקור הוא כפולה שלמה של b.

ג. אם המחזור הוא 1 אז קיים n , כך שניתן לבקר במצב לאחר n שלבים וגם לאחר $n+1$ שלבים. לפי הסעיף הקודם n וגם $n+1$ הם כפולה שלמה של b, לכן $b=1$.

ד. הראנו שתמיד $b \geq a$ וגם הראנו שאם $a=1$ אז גם $b=1$. לכן התנאים ש $a=1$ וש $b=1$ הם שקולים. לכן שניהם מאפינים של אי מחזוריות.

שאלה 4

א. כל צעד הוא במימד זה בהסתברות $\frac{1}{3}$. לכן התוחלת היא $\frac{2n}{3}$.

ב. נזקקנו לחוק החזק כדי להראות שרק במספר סופי של פעמים יהיו מעט מידי צעדים באיזשהו מימד. ביתר המקרים יהיו מספיק צעדים בכל מימד, כך שההסתברות שבמימד זה נהיה בנקודה אפס תהיה מספיק קטנה (כשיש יותר צעדים במימד מסוים, אז ההסתברות שבו נהיה בנקודה אפס היא קטנה יותר). נהיה בראשית רק מספר סופי של פעמים שכוללים חלק כלשהו מהפעמים שבאחד המימדים נעשה פחות מידי צעדים וגם מספר סופי של פעמים מבין האחרים שבהם הסיכוי לחזור לראשית הוא קטן מספיק.

ג. $$\binom{40}{20}0.5^{20}\cdot 0.5^{20}\binom{30}{15}0.5^{15}\cdot 0.5^{15}\binom{30}{15}0.5^{15}\cdot 0.5^{15}$$

(למשל, צעד שהוא במימד ימין שמאל הוא בהסתברות 0.5 ימינה.)

ד. אם במימד מסוים עשינו מספר אי זוגי של צעדים, אז לא ניתן במימד זה לחזור לנקודת ההתחלה ולכן לא ניתן לחזור לראשית.

ה. אנו רוצים למצוא חסם עליון להסתברות לחזור לראשית בכל שלב. אנו מראים שגם טור החסמים אינו מתבדר ומכך מסיקים שגם טור ההסתברויות האמיתיות אינו מתבדר. אם יש מקרה שבו למעשה לא ניתן לחזור לראשית, אז ההסתברות 0 היא קטנה מהחסם העליון ורק גורמת לטור להיות קטן יותר.

שלומי