פתרון תרגיל 6 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

נגדיר מצבים שונים:

מצב 1 - התקבל כבר hh לפני שהתקבל htt

מצב 2 - התקבל כבר htt לפני שהתקבל hh

מצב 3 - עוד לא התקבל אף אחד מהם והאות האחרונה שהתקבלה היא h

מצב 4 - עוד לא התקבל אף אחד מהם ושתי האותיות האחרונות שהתקבלו הן ht

מצב 5 - עוד לא התקבל אף אחד מהם ושתי האותיות האחרונות שהתקבלו הן tt או שהטלנו עד כה לכל היותר מטבע אחד ולא התקבל עדיין אף h.

מטריצת המעבר היא:

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0.5	0	0	0.5	0
0	0.5	0.5	0	0
0	0	0.5	0	0.5

רק מצבים 1 ו 2 הם מצבים נשנים. כל אחד מהם הוא מצב סופג.

יהיו a_i ההסתברויות שנגיע למצב 1 ממצב i. מבוקש a_5. מתקיימת המערכת:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0.5a_1 + 0.5a_2 \\ a_4 = 0.5a_2 + 0.5a_3 \\ a_5 = 0.5a_3 + 0.5a_5 \end{cases}$$

<u>הערה</u>: תוכלו להבחין ש $a_5 = a_3$ כי כאשר עוזבים את מצב 5 בהכרח מגיעים למצב 3.

שאלה 2

<u>א</u>. יש שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים נשנים $\{1,2\}$ ו $\{5\}$. מצבים 3 ו 4 הם חולפים.

יהי e_3 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 3 למצבים נשנים.

יהי e_4 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 4 למצבים נשנים.

מתקיים:

$$\begin{cases} e_3 = 0.4\cdot 1 + 0.3(1+e_3) + 0.2(1+e_4) + 0.1\cdot 1 \\ e_4 = 0.3\cdot 1 + 0.1\cdot 1 + 0.2(1+e_3) + 0.3(1+e_4) + 0.1\cdot 1 \end{cases}$$

<u>ב</u>. המעבר הראשון ממצב 4 שאינו למצב 4 עצמו, צריך להיות לאחד המצבים הנשנים ולא למצב 2.

ההסתברות לכך היא $\dfrac{P_{4,1}+P_{4,2}+P_{4,5}}{P_{4,1}+P_{4,2}+P_{4,3}+P_{4,5}} = \dfrac{0.3+0.1+0.1}{0.3+0.1+0.2+0.1} = \dfrac{5}{7}$

או יותר ברוח פתרונות קודמים אפשר לקבל לגבי הסיכוי המבוקש a משוואה:

$$a = 0.3\cdot 1 + 0.1\cdot 1 + 0.2\cdot 0 + 0.3a + 0.1\cdot 1$$

ג. ניתן לחזור ממצב 2 לעצמו בשני צעדים וגם בשלושה צעדים, לכן הוא לא מחזורי. לכן הגבול קיים.
הגבול שווה למכפלת ההסתברות להיקלט במחלקה $\{1,2\}$ כפול בהסתברות הסטציונרית של מצב 2 במחלקה זו.

יהיו a_3 ו a_4 ההסתברויות להקלט במחלקה $\{1,2\}$ כשמתחילים במצבים 3 ו 4.
מתקיימות משוואות

$$\begin{cases} a_3 = 0.4\cdot 1 + 0.3\cdot a_3 + 0.2a_4 + 0.1\cdot 0 \\ a_4 = 0.3\cdot 1 + 0.1\cdot 1 + 0.2a_3 + 0.3a_4 + 0.1\cdot 1 \end{cases}$$

מתקיימות משוואות

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + \pi_2 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

כאמור ההסתברות המבוקשת היא $a_3\pi_2$.

שאלה 3

יש מחלקה יחידה של מצבים נשנים. המחזור של מצבי המחלקה הוא 2. אם המצב הנשנה הראשון שאליו מגיעים הוא מצב 3 ומגיעים אליו במספר זוגי של צעדים, אז לעולם לא נהיה במצב 4 לאחר מספר זוגי של צעדים. אם המצב הנשנה הראשון שאליו מגיעים הוא 4 או 5 ומגיעים אליו לאחר מספר אי זוגי של צעדים, אז גם לא נהיה אף פעם במצב 4 לאחר מספר זוגי של צעדים. אם לראשונה מגיעים למצב 3 במספר זוגי של צעדים או למצבים 4 או 5 במספר אי זוגי של צעדים, אז פרופורצית הזמן שבה נבלה במצב 4 בצעדים הזוגיים היא 0.4 (כי לאחר כל ביקור במצב 3 עוברים למצב 4 בסיכוי 0.4).

יהי a_1 - ההסתברות שנגיע למצב 3 במספר אי זוגי של צעדים או למצבים 4 ו 5 במספר זוגי של צעדים כאשר מתחילים במצב 1.

יהי a_2 - ההסתברות שנגיע למצב 3 במספר אי זוגי של צעדים או למצבים 4 ו 5 במספר זוגי של צעדים כאשר מתחילים במצב 2.

מתקיימות המשוואות

$$\begin{cases} a_1 = 0.3(1-a_1) + 0.2(1-a_2) + 0.1\cdot 1 + 0.3\cdot 0 + 0.1\cdot 0 \\ a_2 = 0.2(1-a_1) + 0.4(1-a_2) + 0.2\cdot 1 + 0.1\cdot 0 + 0.1\cdot 0 \end{cases}$$

(אם למשל נשארים במצב 1 , אז כעת, בגלל שבזבזנו צעד, צריך מספר אי זוגי של צעדים ל 4 ו 5 או מספר זוגי של צעדים ל 3).

מבוקש $0.4a$.

<u>שאלה 4</u>

יש שלושה מצבים:

1- פועל כעת

2- התקלקל לפני יחידת זמן אחת

3- התקלקל לפני שתי יחידות זמן

מטריצת המעבר היא:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

השרשרת היא בלתי פריקה. מכיון שניתן לבלות שני צעדים רצופים במצב 1, אז היא לא מחזורית.
ההסתברות המבוקשת שווה בקירוב לרכיב הראשון בוקטור ההסתברויות הסטציונריות.
נמצא את הוקטור הזה.

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + \pi_3 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 \\ \pi_3 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מתקבל $\pi_1 = \frac{5}{7}$.

ניתן היה גם לפרש שאם המכשיר מושבת, אז הוא מושבת ל 3 יחידות זמן. במקרה זה מטריצת המעבר היא:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ורעיון הפתרון הוא אותו רעיון.

שלומי