

פתרון תרגיל 7 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

זאת היא שרשרת שהיא הילוך על גרף שבו בכל שלב בוחרים צומת שכן אקראי מבין השכנים של הצומת שבו נמצאים. ההסתברות הסטציונרית של צומת היא דרגתו חלקי סכום הדרגות שבגרף. סכום הדרגות בגרף כאן הוא $1 + 1 + 4 + 2 + 3 + 1 = 12$. הדרגה של הצומת הראשון היא 1. לכן ההסתברות הסטציונרית שלו היא $\frac{1}{12}$. לכן יקח בממוצע 12 צעדים עד שנחזור אליו לאחר שנמצאים בו.

שאלה 2

עבור כל לוח יש תוחלת זמן חזרה סופית כי מדובר בשרשרת סופית בלתי פריקה ולכן נשנית חיובית. ניתן לבחור c_n כך ש $c_n n^2$ ישווה לתוחלת. בכל לוח יש לפרופורציה של $\left(\frac{n-2}{n}\right)^2$ מהמשבצות דרגה 8 ולאחרות דרגה נמוכה יותר. לכן כאשר $n \rightarrow \infty$ הדרגה הממוצעת שואפת ל 8. לצומת פינתי יש תמיד דרגה 3. ההסתברות הסטציונרית שלו היא דרגתו חלקי סכום הדרגות. לכן עבור n גדול ההסתברות הסטציונרית קרובה ל $\frac{3}{8n^2}$ ואילו תוחלת זמן החזרה למצב קרובה ל $\frac{8}{3}n^2$.

שאלה 3

א. תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה מ 1 $\left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\right)$.

לכן נחפש פתרון $0 < t < 1$ למשוואה $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$. מתקבל פתרון $t = 0.5$.

ב. ההסתברות שווה להסתברות ההכחדות בהינתן שבדור ה-0 היו שני פרטים.

שתי שושלות בלתי תלויות צריכות להכחד ולכן ההסתברות היא $0.5^2 = 0.25$.

ג. בסיכוי של רבע יתקבל כל אחד מהערכים ההתחלתיים שבין 2 ל 5.

כאשר בדור ההתחלתי יש k פרטים אז סיכויי ההכחדות הם 0.5^k .

הסתברות ההכחדות היא: $\frac{1}{4} \cdot 0.5^2 + \frac{1}{4} \cdot 0.5^3 + \frac{1}{4} \cdot 0.5^4 + \frac{1}{4} \cdot 0.5^5$

ד. בהינתן שבדור השלישי יש פרט אחד אז תוחלת מספר הפרטים בדור החמישי היא $\left(\frac{4}{3}\right)^{5-3}$.

בהינתן שבדור השלישי יש שני פרטים אז תוחלת מספר הפרטים בדור החמישי היא $2\left(\frac{4}{3}\right)^{5-3}$.

שאלה 4

מצב 0 שבו אף אחד לא שומע את הסיפור הוא מצב סופג שיש מסלול מכל מצב אליו. כאן האוכלוסיה היא סופית, לכן זו למעשה שרשרת סופית ובכל מקרה תהיה הכחדות (נגיע למצב 0). אי אפשר לעשות אינסוף ביקורים במספר סופי של מצבים חולפים. כאן להבדיל מבתהליך הסתעפות רגיל, מספר המצבים הוא סופי.

אבל זה יקח בממוצע הרבה זמן וההתנהגות עד אז תהיה דומה להתנהגות של תהליך הסתעפות. מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה מ 1 אז אין הכחדות ודאית מהירה. אם בדור מסוים יהיו הרבה פרטים אז ההסתברות להכחדות בהמשך הקרוב היא קטנה. אם הפעם הראשונה שיספרו ל 50 איש או ל 100 איש תקרה לפני שלא יספרו לאיש, אז כפי הנראה כבר לא תהיה הכחדות מהירה, מספר אלה שיספרו להם יגדל והסיפור ימשיך להסתובב באי עד שיגיע לכל תושב באיזשהו שלב ויגיע גם למי שסיפר ראשון. כמוכן שאם בשלב מסוים לא יספרו לאיש לפני שספרו ליותר מאחד, אז זאת הכחדות.

$$\cdot \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

ההסתברות שיספרו ל 50 או ל 100 לפני שלא יספרו לאף אחד היא $\frac{2}{3}$

זאת היא הסתברות מקורבת. ההסתברות המדויקת קצת יותר קטנה ממנה.

שלומי