פתרון תרגיל 8 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdot & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \cdot & \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

השרשרת לא פריקה. מספר הלקוחות הממוצע שמגיעים ביחידת זמן שרות הוא $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{2}{3}$ וכך הוא קטן מ 1, לכן השרשרת נישנת חיובית. נחשב את תוחלת זמן החזרה ממצב אפס למצב אפס:

$$E_0=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\left(E_{1,0}+1\right)+\frac{1}{6}\left(E_{2,0}+1\right)$$
$$E_{2,0}=2E_{1,0}$$

על פי השיוויון בין שתי השורות הראשונות אפשר לראות שתוחלות זמני החזרה למצב 0 ממצבים 0 ו 1 הן שוות.

$$E_{1,0}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\left(E_{1,0}+1\right)+\frac{1}{6}\left(2E_{1,0}+1\right)$$
$$E_{1,0}=3\Rightarrow E_0=3\Rightarrow \pi_0=\frac{1}{3}$$

התוצאה הזאת מתאימה לתוצאה המתקבלת לפי הנוסחא $\pi_0=1-E(Z)$ כאשר Z הוא המשתנה המייצג את מספר הלקוחות הבאים ביחידת זמן.

לשם חישוב הרכיבים המבוקשים של הוקטור הסטציונרי נשתמש בשתי משוואות.

$$\begin{cases} \pi_0=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1=\frac{1}{3}\pi_0+\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2 \end{cases}$$

משתי משוואות אלה ומתוצאת החישוב הקודם שעשינו ל π_0 נקבל ש $\pi_0=\pi_1=\frac{1}{3}$, $\pi_2=\frac{2}{9}$.

<u>שאלה 2</u>
המקום הראשון שבו מבקרים החל מ 2000 צריך להיות 2002 . המקום הראשון שבו מבקרים החל מ 5000 צריך להיות 5001 . בגלל המרחק הרב שבין הנקודות אז שני המאורעות הם כמעט ב"ת. לראשון יש הסתברות של בקירוב $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$ ולשני יש הסתברות של בקירוב $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$. בגלל שהמאורעות כמעט ב"ת, אז לחיתוך יש הסתברות של בקירוב $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3.5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$.

<u>שאלה 3</u>
ההסתברות היא 1.
נסתכל על תהליך סטוכסטי בעל מרחב מצבים שהוא הזוגות הסדורים (X_n, Y_n).
<u>טענה</u>: תהליך זה הוא שרשרת מרקוב.
<u>הסבר</u>:
בכל אחת מהשרשרות, כל האינפורמציה נמצאת בערך של השלב האחרון וכמו כן אין חשיבות לזהות התקופה.
<u>טענה</u>: זו היא שרשרת מרקוב בלתי פריקה, נשנית ולא מחזורית.
<u>הסבר</u>:
השרשרות המקוריות הן לא מחזוריות (למשלי ניתן לבלות שני צעדים רצופים במצב 1).
לכן קיים N כך שעבור כל $n > N$ יש לכל אחת משתי השרשרות המקוריות, הסתברות חיובית להיות בכל מצב עבור כל מצב התחלתי. לכן מכיון שהשרשרות ב"ת אז הן יכולות לאחר כל $n > N$ צעדים לקבל כל צירוף של מצבים. לכן השרשרת שהגדרנו היא בלתי פריקה וגם לא מחזורית.
שרשרת סופית ובלתי פריקה מקבלת באיזשהו שלב את כל אחד ממצביה. לכן גם המצבים $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ יתקבלו בהכרח באיזשהו שלב.

<u>שאלה 4</u>
לאורך זמן נצפה לשכיחות π_1 ביקורים במצב 1 ולשכיחות של π_2 ביקורים במצב 2.
כך תוחלת מספר הביקורים במצב 2 בין שני ביקורים עוקבים במצב 1 היא $\frac{\pi_2}{\pi_1}$.
יש הסתברות (שאולי היא חיובית ממש שלא נגיע למצב 2 בכלל). בהסתברות זו מתקבל הערך אפס.
כל ביקור במצב 2 לפני חזרה למצב 1 הוא אחרון בסיכוי קבוע. לכן התפלגות מספר הביקורים במצב 2 החל מהביקור הראשון במצב 2 היא גיאומטרית. הפרמטר של ההתפלגות הזאת הוא ההסתברות שממצב 2 נגיע למצב 1 לפני שנחזור למצב 2. יתכן שזה קורה בהסתברות 1 ואז זו התפלגות מנוונת.
לסיכום: יתכן שמתקבלת התפלגות המקבלת רק את הערכים 0 ו 1 ויתכן שבהסתברות מסוימת מתקבל הערך 0 ובהסתברות מסוימת מתקבלת התפלגות גיאומטרית.

שלומי