

## מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 1

התרגילים שאני נותן הם קצרים. עליכם ללמוד גם מתרגילים ומפתרונות של שנים קודמות שמופיעים באתר.  
בתרגיל זה אין שאלות בנושא החשוב של מיון מצבים למצבים נשנים ומצבים חולפים וחלוקה למחלקות בלתי פריקות.  
שאלות בנושא זה מופיעות בתרגילי 1 של שנים קודמות, למשל, בתרגיל 1 של שנת 2009.

---

### שאלה 1

באי נמצאים  $a$  ארנבים ו  $b$  חתולים. בזמן ההתחלתי כל הארנבים והחתולים שבאי הם בריאים. בכל יחידת זמן הופך ארנב בריא להיות חולה בסיכוי 0.5. ארנב חולה לעולם לא יבריא. בכל יחידת זמן הופך חתול בריא להיות חולה בסיכוי 0.5. בכל יחידת זמן הופך חתול חולה להיות בריא בסיכוי 0.5.  
כל שינוי שחל במצבו של כל ארנב או חתול הוא בלתי תלוי בקורה לארנבים והחתולים האחרים. יהי  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  תהליך סטוכסטי המונה את גודל הקבוצה המכילה את כל הארנבים החולים ואת כל החתולים החולים ביחידות הזמן השונות.

בכל אחד מהמקרים הבאים עליכם לקבוע אם  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  היא שרשרת מרקוב.  
אם לדעתכם היא כן שרשרת מרקוב, תנו את מטריצת המעבר שלה.  
אם לדעתכם היא לא שרשרת מרקוב, נמקו זאת.

**א.**  $a = 2$  ,  $b = 0$

**ב.**  $a = 0$  ,  $b = 2$

**ג.**  $a = 1$  ,  $b = 1$

---

### שאלה 2

יהיו  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  ו  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  שרשרות מרקוב בעלות מרחב מצבים זהה שכולל בין היתר את המצבים 1 ו 2. בכל אחד מהסעיפים הבאים רשום צירוף של תנאים. בכל סעיף, עליכם להפריך את אפשרות קיום צירוף התנאים או לתת דוגמא שמראה שהצירוף אפשרי.

**א.** עבור כל מצב  $i \neq 1$  השורה ה-  $i$  במטריצת המעבר של  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  זהה לשורה ה-  $i$  במטריצת

המעבר של  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ , בשרשרת  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  מצב 2 הוא נשנה ובשרשרת  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$  הוא חולף.

**ב.** עבור כל מצב  $i \neq 1$  השורה ה-  $i$  במטריצת המעבר של  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  זהה לשורה ה-  $i$  במטריצת

המעבר של  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ , בלתי פריקה, מצב 1 הוא נשנה בשרשרת  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  וחולף

בשרשרת  $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

---