

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 5

הערה: בתרגיל זה אין צורך לחזור על הוכחות שעשינו בכיתה. צריך רק לצטט טענות שהוכחנו.

שאלה 1

נתונות שתי שרשרות מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ לשתייהן מרחב מצבים זהה $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח ש $(X_0 = 1)$ וש $(Y_0 = 3)$. נניח גם ששתי השרשרות בלתי תלויות.

מהי ההסתברות ששני התהליכים $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ יפגשו לפחות פעם אחת?

מהי ההסתברות שהם יפגשו אין סוף פעמים?

(תהליכים נפגשים אם קיים שלב שבו הם מקבלים את אותו ערך.)

שאלה 2

נתונות שלוש שרשרות מרקוב בלתי תלויות $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$, $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$, $\{X_n\}_{n=0}^\infty$.

נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ היא הילוך מקרי סימטרי על כל החזקות (חיוביות, שליליות ואפס) של 3 זאת אומרת

שאם $(X_n = 3^i)$, אז X_{n+1} מקבל בסיכויים שווים את הערכים 3^{i-1} ו 3^{i+1} .

נניח ש $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ היא הילוך מקרי סימטרי על כל החזקות (חיוביות, שליליות ואפס) של 5 זאת אומרת

שאם $(Y_n = 5^i)$, אז Y_{n+1} מקבל בסיכויים שווים את הערכים 5^{i-1} ו 5^{i+1} .

נניח ש $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ היא הילוך מקרי סימטרי על כל החזקות (חיוביות, שליליות ואפס) של 7 זאת אומרת

שאם $(Z_n = 7^i)$, אז Z_{n+1} מקבל בסיכויים שווים את הערכים 7^{i-1} ו 7^{i+1} .

נניח שלכל שלושת השרשרות יש מצב התחלתי של 1, זאת אומרת ש $(X_0 = 1, Y_0 = 1, Z_0 = 1)$.

א. מהי ההסתברות שכל זוג של תהליכים מבין שלושת התהליכים, יפגשו אין סוף פעמים?

ב. מהי ההסתברות שאין סוף פעמים יתקיים $(X_n = Y_n = Z_n)$?

ג. האם התשובות הקודמות תקפות גם אם $(X_0 = 1, Y_0 = 1, Z_0 = 7)$?

שאלה 3

תנו דוגמא לשרשרת מרקוב על כל השלמים שיש לה שתי מחלקות בלתי פריקות, אחת של מצבים נשנים ואחרת של מצבים חולפים.

שאלה 4

נתונה שרשרת מרקוב בעל מרחב מצבים $\{1,2\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נמקו מדוע קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(n)}$ ומצאו אותו.