

מבוא לתהליכים סטוכסטיים / תרגיל 7

שאלה 1

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של מטבע שעל שעל צד אחד שלו רשום 2 ועל הצד השני רשום 4. יהי S_n הסכום המצטבר ב n ההטלות הראשונות. יהי Z_n שארית החלוקה של S_n ב 3.

נסתכל על שרשרת מרקוב $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2\}$.

א. מצאו את מטריצת המעבר של השרשרת $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$?

ב. האם השרשרת הזאת היא פריקה ?

ג. מהו המחזור של מצבי השרשרת ?

ד. מצאו וקטור סטציונרי לשרשרת ?

ה. האם הוקטור הזה הוא וקטור סטציונרי יחיד של השרשרת ?

ו. הסיקו מהי ההסתברות הגבולית של המאורע ש S_n הוא כפולה שלמה של 3.

ז. הסיקו מהי תוחלת זמן החזרה מהמצב שבו $(Z_n = 0)$ לעצמו.

שאלה 2

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים של השלמים האי שליליים.

נניח ש $P_{0,i} = f(i)$ עבור כל $i \geq 1$ (כך $\sum_{i=1}^{\infty} f(i) = 1$).

ו $P_{i,i-1} = 1$ עבור כל $i \geq 1$.

א. נניח שלשרשרת יש וקטור הסתברויות סטציונריות $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$.

הראו שעבור כל $i \geq 1$ מתקיים $\pi_i \leq \pi_{i-1}$.

ב. נניח שעבור $i \geq 1$ מתקיים שתוחלת זמן החזרה למצב i המסומנת ב E_i , היא סופית.

הסיקו מסעיף א' שמתקיים $E_i \geq E_{i-1}$.

ג. מצאו צרוף תנאים מספיקים והכרחיים לגבי הפונקציה f לכך שכל רכיבי הוקטור

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ יהיו חיוביים.

שאלה 3

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בלתי פריקה בעלת M מצבים. נניח שהמחזור של המצבים הוא 3.

א. נניח ש $M = 6$. האם בהכרח קיים מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$? האם בהכרח לא קיים

מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$?

ב. נניח ש $M = 5$. האם בהכרח קיים מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$? האם בהכרח לא קיים

מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$?

המשך בעמוד הבא

שאלה 4

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3,4\}$ ובעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,3}^{(2n)}$.
