

פתרון תרגיל 1 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2\}$ ומטריצת מעבר:

$$\begin{pmatrix} 0.5^2 & 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 & 0.5^2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

למשל, כדי לעבור ממצב 0 למצב 1, צריך שארנב אחד יחלה ואחר ישאר בריא.

ב. שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2\}$ ומטריצת מעבר:

$$\begin{pmatrix} 0.5^2 & 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 & 0.5^2 \\ 0.5^2 & 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 & 0.5^2 \\ 0.5^2 & 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 & 0.5^2 \end{pmatrix}$$

למשל, כאשר נמצאים במצב 1, כדי להישאר במצב 1, צריך שהאחד הבריא ישאר בריא ושהאחד החולה ישאר חולה, או שהבריא יחלה והחולה יחלה. למעשה בכל שלב כל חתול יהיה חולה בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי בחתולים אחרים ובקורה בשלבים אחרים. כך בכל שלב מספר החולים מתפלג $Bin(2,0.5)$ באופן בלתי תלוי בשלבים אחרים.

ג. זו לא שרשרת מרקוב. לא מתקיימת תכונת המרקוביות.

אם נמצאים במצב 1, אז הסיכוי להגיע למצב 0, תלוי בעבר. אם בעבר כבר היינו במצב 2, אז בהכרח הארנב כבר חלה. הוא כבר לעולם לא יבריא. לכן, אי אפשר להגיע למצב 0. לעומת, זאת אם עדיין אף פעם לא היינו במצב 2, אז יתכן שהארנב עדיין בריא. לכן יש סיכוי להגיע למצב 0. האינפורמציה אם בעבר היינו במצב 2 היא רלוונטית.

הערות:

הנימוק שהתהליך אינו מרקובי בגלל שהוא תלוי בתהליך אחר, אינו טוב.

למשל נסתכל על שרשרת מרקוב של הילוך מקרי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. התהליך הזה תלוי בתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ שמקיים $Y_n = X_{n+1}$ כי אם למשל אנו יודעים Y_{99} מקבל ערך מסוים, אז ברור ש X_{100} מקבל את אותו ערך כי הרי $Y_{99} = X_{100}$.

הנימוק שהתהליך אינו מרקובי בגלל שתלוי אם החולה הוא ארנב הוא חתול, הוא גם לא נימוק טוב. צריך להראות שמה שרואים בתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ עצמו אינו מרקובי. בתהליך הזה באים לידי ביטוי אפשרויות שונות וצריך להסתכל רק על מה שבא לידי ביטוי בו.

שאלה 2

א. זה יתכן.

נתן דוגמא לשרשרות בעלות שני מצבים בלבד עם מטריצות מעבר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

שתי מטריצות המעבר נבדלות רק בשורה הראשונה.

בשרשרת הראשונה מצב 2 הוא ארגודי. בשרשרת סופית ארגודיות מספיקה לנשנות. לכן הוא נשנה. בשרשרת השניה מצב 2 הוא לא ארגודי ולכן הוא חולף.

ב. לא יתכן.

השרשרת הראשונה היא בלתי פריקה. לכן, ניתן להגיע ממצב 1 לכל מצב אחר. אילו היה קיים בה מצב שממנו היתה הסתברות חיובית לא לחזור למצב 1, אז מצב 1 היה חולף (כי יתכן שנגיע באיזשהו שלב ממצב 1 לאותו מצב וממנו לא נחזור למצב 1). לכן בהסתברות 1 מכל

מצב חוזרים באיזושהו שלב למצב 1.
מכל מצב, ההסתברות לחזור למצב 1 היא זהה בשתי השרשרות ולכן גם בשרשרת השניה מכל מצב
בודאות נחזור למצב 1 (ההסתברות לחזור למצב לא תלויה בהסתברויות המעבר ממנו, הסתברויות
המעבר ממנו קובעות רק את מה שקורה לאחר שחוזרים אליו).
אם בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ לא ניתן לעזוב את מצב 1 לשום מצב אחר, אז מצב 1 הוא מצב סופג ובודאי
שהוא נשנה.

הערה

הנימוק שמצב 1 הוא נשנה בגלל שמכל מצב יש מסלול למצב 1, אינו מספק. אמנם בשרשרת סופית,
מצב ארגודי הוא בהכרח נשנה. אבל, ראינו דוגמא שבשרשרת אין סופית מצב ארגודי אינו נשנה.
קיום מסלולים למצב 1, רק גורר שקיים סיכוי לחזור למצב 1. אבל זה לא אומר שנחזור למצב 1
בודאות.

שלומי