פתרון תרגיל 2 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. עבור כל $n \geq 1$ מתקיים $P(X_n \leq n) \geq P(X_n = 1) = 0.5$.

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \leq n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 0.5 = \infty$ ומכיון שהמאורעות הם ב"ת, אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n \leq n)$.

מתקיים $P(X_n > n) = 0.5^n$. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5^n < \infty$ אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו רק מספר סופי של מאורעות $(X_n > n)$.

ב. עבור כל $n \geq 1$ מתקיים $P(X_n \leq n) \geq P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \leq n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ומכיון שהמאורעות הם ב"ת, אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n \leq n)$.

מתקיים $P(X_n > n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. מתקיים $\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} > 0.1$. לכן קיים N כך שעבור כל $n > N$ מתקיים $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0.1$. מכיון שיש אין סוף איברים שגדולים מ 0.1 אז סכום הטור הוא אין סוף. מכיון שהמאורעות הם ב"ת, אז בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n > n)$.

<u>הערות</u>

שימו לב שבמקרה זה בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות וגם אין סוף מאורעות שמשלימים להם.

למעשה עבור כל n טבעי מתקיים $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0.1$. אבל כאן במקום להוכיח את העובדה הזאת, עשינו שימוש בגבול של $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

שאלה 2

נגדיר סדרת משתנים מקריים לפי

$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 0.5$ ועבור כל $i \geq 2$: $P(X_i = 0) = 1$.

לכל המשתנים יש תוחלת של 0. הסכום של n המשתנים הראשונים יכול להיות רק 1 או -1 ולכן הממוצע שלהם יכול להיות רק $\frac{1}{n}$ או $-\frac{1}{n}$. לכן הממוצע שואף לאפס שהיא התוחלת שלו. לכן על הסדרה חל החוק החזק.

בהסתברות חצי מתקיים שלכל $n \geq 1$: $(S_n = 1)$ ובהסתברות חצי מתקיים שלכל $n \geq 1$: $(S_n = -1)$

(זה תלוי רק במשתנה הראשון X_1). לכן בהסתברות חצי הממוצעים המצטברים של הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ שואפים ל 1 ובהסתברות חצי הם שואפים ל -1. לכן הם לא שואפים לתוחלתם שהיא אפס ולכן החוק החזק לא חל על סדרה זו.

שאלה 3

נגדיר סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ לפי $P\left(X_n=\frac{1}{n}\right)=1$ (אלה משתנים מנוונים שאינם שווי התפלגות). הממוצע המצטבר שלהם תמיד ידוע מראש והוא תמיד שווה לתוחלתו. לכן החוק החזק חל על הסדרה. החוק החזק אומר שהממוצע נבדל מהתוחלת ביותר מ ε, עבור כל ε קבוע, רק מספר סופי של פעמים. כאן הממוצע שווה לתוחלת בהסתברות 1 תמיד ולכן בהסתברות 1 הוא אף פעם לא נבדל מהתוחלת ביותר מ ε עבור כל ε קבוע.

סדרה זו היא שרשרת מרקוב: אם נמצאים במצב $\frac{1}{n}$, אז ידוע שבשלב הבא עוברים למצב $\frac{1}{n+1}$ (למעשה את התקופה אנו גם יודעים לזהות לפי ערכו של המשתנה). לגבי כל מצב שבו נמצאים, אי אפשר לחזור אליו שוב. לכן כל המצבים חולפים.

שלומי