פתרון תרגיל 3 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

נתן דוגמאות לשלוש מטריצות מעבר של שרשרות מרקוב בנות חמישה מצבים.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

3 2 1

בראשונה ניתן לחזור למצב ההתחלתי רק בכפולות ש 5 צעדים ולכן המחזור של המצבים הוא כפולה של 5. ניתן לחזור גם בבדיוק 5 צעדים ולכן המחזור הוא לא יותר מ 5. לכן המחזור הוא בדיוק 5.

בשניה ניתן לחזור למצב הראשון מעצמו רק בכפולות ש 3 צעדים ולכן המחזור של המצבים הוא כפולה של 3. ניתן לחזור גם בבדיוק 3 צעדים ולכן המחזור הוא לא יותר מ 3. לכן המחזור הוא בדיוק 3.

בשלישית ניתן (אפילו בהכרח) לחזור למצב בצעד אחד ולכן המחזור הוא 1 (לא מחזורי).

שאלה 2

נניח ש $P_{0,0}=1$, $P_{1,0}=P_{1,2}=0.5$, עבור כל $i\geq 2$: $P_{i,i+1}=1$.

מצב 0 הוא מצב סופג וככזה הוא בודאי נשנה. מכל מצב אחר יש מעבר למצב שממנו אין דרך חזרה ולכן כל מצב אחר הוא לא ארגודי וככזה הוא בודאי חולף.

ממצב 1 עוברים למצב 0 בסיכוי חצי ובסיכוי חצי עוברים למצב 2 שממנו אי אפשר להגיע למצב 0.

שאלה 3

נפריך את הטענה על-ידי מתן דוגמא נגדית. נגדיר סדרת משתנים:

עבור n זוגי יתקיים $P(X_n=0)=1$.

עבור n אי זוגי יתקיים $P(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$, $P(X_n=-n)=\frac{1}{n}$.

המכסימום של כל שני משתנים שכנים תמיד מקבל את הערך 0 (כי המשתנה שבמקום הזוגי הוא בהכרח 0). התוחלת של המכסימום של כל שני שכנים היא 0 והם גם בפועל בהכרח מקבלים את הערך הזה.

לכן, על סדרת המשתנים המקריים $Y_n=\max\{X_n,X_{n+1}\}$ חל החוק החלש (אף החוק החזק, מה שלא רלוונטי כאן).

נראה שעל סדרת המשתנים המקוריים החוק החלש לא חל:

התוחלת של המשתנים שבמקומות הזוגיים היא 0. התוחלת של המשתנים שבמקומות האי זוגיים היא $\frac{1}{n}\cdot(-n)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 0=-1$. לכן סדרת התוחלות המצטברות $\frac{\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{n}$ שואפת ל -0.5 (אף שווה בדיוק ל -0.5 במקומות הזוגיים). אילו החוק החלש היה חל על הסדרה, אז סדרת הממוצעים היתה שואפת בהסתברות ל -0.5 . כך למשל היה קיים M המקיים שעבור כל $m\geq M$ הממוצע היה בין -0.51 ל -0.49 בהסתברות של לפחות (למשל) 0.95 . זאת אומרת שבין היתר היה מתקיים

עבור $m \geq M$ זוגי $P\left(-0.51 \leq \dfrac{S_m}{m} \leq -0.49\right) \geq 0.95$ וגם

$P\left(-0.51 \leq \dfrac{S_{2m}}{2m} \leq -0.49\right) \geq 0.95$.

זאת אומרת ש $P(-0.51m \leq S_m \leq -0.49m) \geq 0.95$ וגם

$P(-1.02m \leq S_{2m} \leq -0.98m) \geq 0.95$, זאת אומרת שמתקיים $P(-0.51m \leq S_m) \geq 0.95$ וגם $P(S_{2m} \leq -0.98m) \geq 0.95$. זאת אומרת שההסתברות שיתרחש לפחות אחד מבין $(S_m < -0.51m)$ או $(S_{2m} > -0.98m)$ היא לכל היותר 0.1 . נשים לב ש $S_{2m} = S_m + \sum_{i=m+1}^{2m} X_i$. אם $\sum_{i=m+1}^{2m} X_i = 0$, אז $S_{2m} = S_m$ ולא יתכן שיתקיים גם $(S_m \geq -0.51m)$ וגם $(S_{2m} \leq -0.98m)$. נראה שבהסתברות גדולה מ 0.1 , כל המשתנים X_i עבור $m+1 \leq i \leq 2m$ הם אפסים. ההסתברות שכולם אפסים היא

$$\frac{m}{m+1}\cdot 1\cdot\frac{m+2}{m+3}\cdot 1\cdot\frac{m+4}{m+5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot 1$$ (במקומות הזוגיים הם תמיד אפסים)

והיא גדולה מ $0.5 = \dfrac{m}{2m} = \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m+1}{m+2}\cdot\dfrac{m+2}{m+3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdot\dfrac{2m-1}{2m}$.

זאת אומרת שבהסתברות גדולה מידי, הממוצע של m הראשונים או של $2m$ הראשונים רחוק מידי מהתוחלת.

<u>האינטואיציה</u>: בהסתברות גבוהה מידי הממוצע משתנה מאוד במעבר בין m ל $2m$. אם הממוצע מאוד משתנה, אז הוא לא יכול להיות בשתי הפעמים האלה קרוב לתוחלת. בהסתברות גבוהה, הוא לפחות באחת מהפעמים האלה רחוק מהתוחלת.

שלומי