<u>פתרון תרגיל 4 במבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

<u>שאלה 1</u>

<u>א</u>. כדי לחזור ממצב 0 למצב 0 , מספר הצעדים ימינה צריך להיות שווה שני שלישים ממספר הצעדים שמאלה. לכן ניתן לחזור למצב 0 רק במספר צעדים שהוא כפולה של 5. ניתן לחזור למצב 0 ב 5 צעדים. לכן המחזור של מצב 0 הוא בדיוק 5. השרשרת היא אי-פריקה ובשרשרת אי פריקה לכל המצבים יש את אותו מחזור לכן המחזור של כל המצבים הוא 5.

נראה שהשרשרת בלתי פריקה: עבור זוג מצבים i, j המקיימים $i > j$: ניתן להגיע מ j ל i אם הולכים $i-j$ צעדים של 3 ימינה ו $i-j$ צעדים של 2 שמאלה. ניתן להגיע מ i ל j אם הולכים $i-j$ צעדים של 3 ימינה ו $2(i-j)$ צעדים של 2 שמאלה.

<u>ב</u>. נשנות היא תכונה מחלקתית. מכיוון שהשרשרת היא אי-פריקה אז די להראות שמצב 0 הוא נשנה.

נשתמש בקריטריון לנשנות. נבדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(n)} = \infty$. למעשה ניתן לחזור למצב 0 רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה של 5, לכן יש לבדוק אם מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(5n)} = \infty$. מתקיים

$$P_{0,0}^{(5n)} = \binom{5n}{2n}\left(\frac{2}{5}\right)^{2n}\left(\frac{3}{5}\right)^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\cdot(3n)!}\left(\frac{2}{5}\right)^{2n}\left(\frac{3}{5}\right)^{3n} \overset{stirling}{\cong}$$

$$\cong \frac{\sqrt{2\pi 5n}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}}{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}\left(\frac{2}{5}\right)^{2n}\left(\frac{3}{5}\right)^{3n}$$

ולזה יש סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ לכן מצב 0 הוא נשנה וכל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

<u>ב</u>. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :

נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$ וגם $q_2 \cdot 10^n - p_2 \cdot 10^n \geq q_1 - p_1$.

המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

<u>ג</u>. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל $\frac{2}{5}$ ($\frac{2}{5}$ זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ $\frac{2}{5}$ בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ $\frac{2}{5}$ מרוחק

מ $\frac{2}{5}$ ב $\varepsilon=\left|\frac{2}{5}-\frac{p}{q}\right|$.

ד. הוכחנו בשאלה 1 שכאשר בכל שלב הולכים שלושה צעדים ימינה בסיכוי $\frac{2}{5}$ ושמאלה בסיכוי $\frac{3}{5}$, אז השרשרת היא נשנית. לכן חוזרים לנקודת ההתחלה ∞ פעמים. זאת אומרת ש ∞ פעמים תהיה פרופרצית מספר הפעמים שהלכנו ימינה שווה בדיוק ל $\frac{2}{5}$. כך כאן עבור ∞ ערכי n תהיה

פרופורצית מספר המשתנים עד אליו שיקבלו את הערך 1 שווה ל $\frac{2}{5}$.

ה. לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה $\frac{2}{5}$ מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

ו. $P\left(\frac{S_3}{3}=\frac{2}{3}\mid\frac{S_2}{2}=\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}>0$, $P\left(\frac{S_5}{5}=\frac{2}{3}\mid\frac{S_4}{4}=\frac{1}{2}\right)=0$ (מדובר בהסתברויות מותנות).

מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

שאלה 3

א. נתן דוגמא לשרשרת בעלת המצבים $\{0,1,2,3\}$. נניח שמתקיים $P_{0,1}=P_{0,2}=P_{0,3}=\frac{1}{3}$ ושמצבים 1,2,3 הם סופגים. אם מתחילים במצב 0, אז מגיעים לבדיוק אחד משלושת המצבים האחרים ונשארים בו תמיד, כך שהוא המצב בעל האינדקס המכסימלי.

ב. נתן דוגמא לשרשרת שקבוצת מצביה היא כל השלמים האי שליליים. נניח שמתקיים עבור כל $i\geq 1$ $P_{0,i}=0.5^i$ וכל המצבים $i\geq 1$ הם סופגים. אם מתחילים במצב 0, אז מגיעים לבדיוק מצב אחד והאינדקס שלו מתפלג גיאומטרית.

ג. נתן דוגמא של הילוך מקרי על כל הישר שבו עבור כל $-\infty<i<+\infty$ מתקיים $P_{i,i+1}=p=1-P_{i,i-1}$, כאשר $p<0.5$. המצב ההתחלתי יהיה מצב 1. בגלל שיש סחף לשמאל, אז עבור כל מצב i שבו נמצאים יש הסתברות חיובית שלעולם לא נגיע ממנו למצב $i+1$. בגלל סימטריה בין המצבים שעל הישר, הסיכוי הזה, הוא אותו סיכוי בכל מצב. עבור כל מצב i שבו נמצאים, יש סיכוי $0<a<1$. לא להגיע אף פעם למצב $i+1$. כל מצב $i\geq 1$ שאליו מגיעים לראשונה הוא בסיכוי a המצב הימני ביותר שאליו נגיע אי פעם. לכן למכסימום יש התפלגות $G(a)$.

<u>הערה</u>

אפשר אף לחשב את ההסתברות להגיע אי פעם ממצב i למצב $i+1$. יהי b - סיכוי זה. מתקיים $b=p\cdot 1+qb^2$ (בהסתברות p מגיעים למצב $i+1$ בצעד אחד ובהסתברות q מגיעים בצעד אחד למצב $i-1$ ואז הסיכוי להגיע אי פעם למצב $i+1$ הוא b^2 כי צריך להגיע ממצב $i-1$ למצב i וממצב i למצב $i+1$). מתקבל פתרון $b=\frac{p}{q}$. לכן בהילוך המתואר, ערך המכסימום מתפלג $G\left(1-\frac{p}{q}\right)$.
