פתרון תרגיל 5 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

השרשרת היא בלתי פריקה: יש למשל מסלול $1 \to 3 \to 2 \to 1$ שבו מגיעים לכל מצב לאחר שהיינו בכל מצב אחר.

המחזור של מצב 1 הוא 1 (הוא לא מחזורי): ניתן להיות בו בשני צעדים רצופים.

כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם לא מחזוריים: ראינו שאי מחזוריות היא תכונה מחלקתית.

ראינו בכיתה שכל שני תהליכים בעלי אותה מטריצת מעבר לא מחזורית שהם ב"ת בעלי מצבים התחלתיים כלשהם, נפגשים באיזשהו שלב בהסתברות 1. כך, לאחר כל פעם שהם נפגשים, יהיה קיים בהסתברות 1 זמן פגישה נוסף. כך בהסתברות 1 הם יפגשו אין סוף פעמים (המצב 1,1 הוא מצב נשנה בשרשרת $\{X_n, Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ולכן חוזרים אליו אין סוף פעמים בהסתברות 1).

שאלה 2

א. כל זוג תהליכים נפגשים אין סוף פעמים בהסתברות 1.

הסבר:

כל תהליך מתחיל במצב 1 ומבצע הילוך סימטרי סביב מצב זה. עבור כל שלב $2n$ זוגי, הוא נמצא במצב 1 בהסתברות שהיא בסדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$. כך זוג תהליכים ב"ת ימצאו שנהם סימולטנית במצבי 1 שלהם בהסתברות שהיא בסדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$. כל זוג סדור של תהליכים ב"ת מהווה שרשרת מרקוב. לפי הקריטריון לנשנות של מצבים בשרשרת מרקוב, המצב $(1,1)$ הוא נשנה ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$). לכן בהסתברות 1 חוזרים למצב $(1,1)$ אין סוף פעמים.

הערה: חזרות למצב בזמנים שונים הם מאורעות תלויים, לכן כאן לא יכולנו להשתמש בלמה של בורל קנטלי.

ב. הערך היחיד שאותו יכול יותר מתהליך אחד לקבל הוא 1. כל אחד מהתהליכים יכול לחזור למצב 1, רק לאחר מספר זוגי של צעדים. ההסתברות שלאחר $2n$ צעדים, שלושת התהליכים יהיו במצב 1, היא בסדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1.5}}$. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}} < \infty$, אז לפי הקריטריון לנשנות בהסתברות 1 כל שלושת התהליכים יהיו סימולטנית במצב 1, רק מספר סופי של פעמים).

הערה: בכיוון הזה כן יכולנו גם לנמק בעזרת הלמה של בורל קנטלי, כי בצד הזה לא נדרשת אי תלות.

ג. כאן התהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ יוכל לבקר במצב 1, רק בשלבים אי זוגיים. שני התהליכים האחרים יוכלו לבקר במצב 1 רק בשלבים זוגיים. לכן אין בכלל אפשרות ש $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ יפגש עם תהליך אחר. שוב, המצב 1 הוא המצב היחיד שמשותף ליותר מתהליך אחד. לכן לעולם לא תהיה פגישה של שני תהליכים במצב אחר.

שאלה 3

נגדיר מטריצת מעבר שאבריה החיובים היחידים יהיו:

עבור $i \le -1$: $P_{i,i-1} = 0.8 = 1 - P_{i,i+1}$

$$P_{0,-1} = 1$$

$$P_{1,2} = 1$$

עבור $i \ge 2$: $P_{i,i-1} = 0.8 = 1 - P_{i,i+1}$

יש לשרשרת שתי מחלקות בלתי פריקות. הראשונה היא של השליליים ואפס והשניה היא של החיובים.
אם מתחילים במצב 0, אז לא בהכרח חוזרים אליו באיזשהו שלב (יש סחף שמאלה, מ 0 הולכים ל -1 ומשם לא בודאות חוזרים ל 0, כמו שבהילוך שכולו מוטה שמאלה, לא בודאות חוזרים מ -1 ל 0 , אין משמעות לכך שההילוך חסום ב 0, זה לא משפיע על סיכויי החזרה מ -1 ל 0).
לכן מצב 0 הוא מצב חולף. לכן כל מצבי המחלקה הבלתי פריקה של השליליים ו 0 היא של מצבים חולפים.
ממצב 1 בהכרח עוברים למצב 2. ממצב 2 בהכרח חוזרים באיזשהו שלב למצב 1 (כמו שקורה בהילוך מקרי שמוטה שמאלה). לכן מצב 1 הוא נשנה. לכן כל מצבי המחלקה הבלתי פריקה של החיובים היא של מצבים נשנים.

<u>שאלה 4</u>

השרשרת בלתי פריקה.
השרשרת לא מחזורית: ניתן לחזור למצב 1 בצעד אחד ולכן המחזור שלו הוא 1. אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית ולכן השרשרת כולה היא לא מחזורית.
למדנו שבשרשרת סופית בלתי פריקה ולא מחזורית, קיימת עבור כל מצב i הסתברות גבולית $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)}$ ושהיא שווה ל $\frac{1}{E_i}$. כאשר E_i היא תוחלת זמן החזרה ממצב i לעצמו.
נחשב את תוחלת זמן החזרה ממצב 1 לעצמו: בהסתברות 0.2 חוזרים למצב 1 בצעד אחד. בהסתברות 0.8 עוברים ממצב 1 למצב 2 ואז מייד חוזרים למצב 1. לכן מתקיים $E_1 = 02 \cdot 1 + 0.8 \cdot 2 = 1.8$.
לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)} = \frac{1}{1.8}$.

שלומי