

פתרון תרגיל 6 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

- א.** מכל מצב i בהכרח חוזרים למצב 0 תוך i צעדים ולכן מצב 0 הוא בהכרח נשנה.
- ב.** ממצב 3 בהכרח מגיעים תוך 3 צעדים למצב 0. לכן אם אין מסלול ממצב 0 למצב 3, אז מצב 3 הוא חולף. למשל אם ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1, אז מצב 3 הוא חולף.
- ג.** אם ממצב 0 אפשר להגיע ישירות גם למצב 1 וגם למצב 2, אז ניתן לחזור למצב 0 בשני צעדים וגם בשלושה צעדים ולכן מצב 0 הוא בעל מחזור 1 (לא מחזורי).
- ד.** אם ממצב 0 מגיעים ישירות רק למצבים $1, 2, 5, 8, 11, 14, \dots$, אז ניתן לחזור למצב 0 רק בכפולות של 3 צעדים ולכן המחזור של מצב 0 הוא כפולה של 3. ניתן גם לחזור למצב 0 בבדיוק 3 צעדים (על-ידי מעבר ישיר למצב 2) ולכן המחזור של מצב 0 הוא לא יותר מ 3. לכן המחזור שלו הוא בבדיוק 3.
- ה.** אם ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1, אז בהכרח חוזרים למצב 0 תוך שני צעדים וכך תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא 2 (סופית) וכך מצב 0 הוא נשנה חיובי.

נראה שיתכן גם שמצב 0 הוא נשנה חיובי בשרשרת אין סופית:
 אם מתקיים $P_{0,i} = 0.5^i$ עבור כל $i \geq 1$. אז בהסתברות 0.5^i מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 הוא $i+1$ וכך תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i (i+1) < \infty$ ומצב 0 הוא נשנה חיובי.

1. אם מתקיים $P_{0,i} = \frac{1}{i(i+1)}$, אז בהסתברות $\frac{1}{i(i+1)}$ חוזרים למצב 0 ב $i+1$ צעדים וכך תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} (i+1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$. כך מצב 0 הוא נשנה אפס.

1. אם $P_{0,i} = \frac{c}{i(i+1)^2}$ (כאשר c הוא קבוע מתאים, כך ש $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{i(i+1)^2} = 1$), אז מצב 0 הוא

נשנה חיובי (כי $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{i(i+1)^2} (i+1) < \infty$). אך תוחלת רבוע זמן החזרה למצב 0 היא אין סוף

($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{i(i+1)^2} (i+1)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$). כך שונות זמן החזרה למצב 0 היא אין סוף.

ii אם מצב 0 הוא נשנה אפס (כמו בסעיף 1), אז למצב 0 יש הסתברות גבולית של 0 וכך קיימת הסתברות גבולית.

נניח שממצב 0 אפשר להגיע ישירות רק לשלמים האי זוגיים ומתקיים $P_{0,i} = \frac{c}{i(i+1)}$ עבור i אי

זוגי (כאשר הקבוע c מקיים $\sum_{i \text{ odd}} \frac{c}{i(i+1)} = 1$). מצב 0 הוא בעל מחזור 2 (ניתן לחזור אליו רק

בצעדים זוגיים ובפרט ניתן לחזור אליו בשני צעדים). תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא

$$\sum_{i \text{ odd}} \frac{c}{i(i+1)} (i+1) = \infty$$

נסתכל על שרשרת מרקוב המייצגת את הקורה בשלבים הזוגיים (זו שרשרת בעלת מטריצת מעבר ששווה לריבוע מטריצת המעבר המקורית). בשרשרת זו מצב 0 הוא נשנה אפס (כאן כל שני צעדים של התהליך המקורי נחשבים כצעד אחד ותוחלת מחצית זמן החזרה למצב 0 היא גם אין סוף). לכן בזמנים הזוגיים יש למצב 0 הסתברות גבולית של אפס. בזמנים האי זוגיים, יש למצב 0

הסתברות גבולית של אפס כי כלל לא ניתן בהם לשהות בו. לכן מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)} = 0$.

- ט. אם ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1, אז בזמנים הזוגיים בהכרח נמצאים במצב 0 ובזמנים האי זוגיים בהכרח לא נמצאים במצב 0. לכן לא קיימת הסתברות גבולית.
- י. אם ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 8, אז למצב 0 בהכרח חוזרים ב 9 צעדים וגם למצב 8 בהכרח חוזרים ב 9 צעדים. לכן כל אחת משתי התוחלות הן 9.
-

שלומי