<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 7</u>

<u>שאלה 1</u>

<u>א</u>. תהי p - ההסתברות לקבלת תוצאה 2 בהטלה בודדת.
שימו לב שלא הנחנו שהמטבע הוגן. לכן נפתור עבור p כללי שבקטע הפתוח שבין 0 ל 1.
שימו לב שאם $p = 0$ או $p = 1$, אז השרשרת אינה בלתי מחזורית ולכן הטיעונים שבהמשך בסעיף ו' על קיום הסתברויות גבוליות אינם תקפים.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix}$$

<u>ב</u>. מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (בלכל היותר שני צעדים). לכן השרשרת היא בלתי פריקה.
<u>ג</u>. מכל מצב ניתן לחזור לעצמו בשני צעדים וניתן לחזור אליו גם בשלושה צעדים. לכן המחזור הוא 1.
<u>ד</u>. וקטור סטציונרי מקיים

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3)\begin{pmatrix} 0 & 1-p & p \\ p & 0 & 1-p \\ 1-p & p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} .$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

מפתרון המערכת מתקבל וקטור סטציונרי $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. שימו לב שזהו הפתרון עבור כל $0 < p < 1$.

עבור כל ערך של p , מטריצת המעבר היא מטריצה דו סטוכסטית ולכן הוקטור האחיד הוא וקטור סטציונרי.

<u>ה</u>. במחלקה בלתי פריקה אין יותר מוקטור סטציונרי יחיד. זה מתקבל גם משיקולים אלגברים כי אין פתרון נוסף למערכת.

<u>ו</u>. מכיון שהשרשרת לא מחזורית, אז יש הסתברות גבולית ששווה להסתברות הסטציונרית. לכן ההסתברות הגבולית שווה ל $\frac{1}{3}$.

<u>ז</u>. מתקיים $\pi_0 = \frac{1}{E_0}$. לכן תוחלת הזמן עד חזרה למצב 0 לאחר שמתחילים בו היא 3.

<u>שאלה 2</u>

<u>א</u>. מתקיים $\pi_{i-1} = \sum_k \pi_k P_{k,i} \overset{here}{=} \pi_i \cdot 1 + \pi_0 P_{0,i-1} \geq \pi_i$

(השיוויון הראשון הוא משוואה מתוך מערכת המשוואות לחישוב וקטור סטציונרי).

<u>ב</u>. מכיון ש $\pi_i \leq \pi_{i-1}$ אז שכיחות הביקורים במצב i אינה גבוהה משכיחות הביקורים במצב $i-1$.
לכן, $\frac{1}{E_i} \leq \frac{1}{E_{i-1}}$.

ג. התנאי הוא שיהיו אין סוף ערכי i שעבורם $f(i) > 0$ ושיתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)(i+1) < \infty$.

<u>הסבר</u>

מכיון שמכל מצב יש מסלול למצב 0, אז כל מצב שאינו במחלקתו של מצב 0 הוא חולף ואין לו הסתברות סטציונרית חיובית.

התנאי הראשון הוא התנאי לכך שכל מצב יהיה במחלקתו ש מצב 0. אם התנאי לא מתקיים, אז קיים i כך שעבור כל $j \geq i$ מתקיים $f(j) = 0$ ולכן ממצב 0 אין מסלול למצב i ולכן מצב i אינו במחלקתו של מצב 0. אם התנאי כן מתקיים, אז עבור כל i, קיים $j \geq i$, כך ש $f(j) > 0$ וכך כל המצבים הם במחלקה של מצב 0.

אם התנאי הראשון מתקיים, אז צריך גם שהמצבים יהיו נשנים חיובית. לגבי כל מצב, הוא נשנה חיובית אם"ם מצב 0 הוא נשנה חיובית (נשנות חיובית היא תכונה מחלקתית). התנאי השני הוא התנאי שתוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית. זהו בדיוק התנאי לנשנות חיובית של מצב 0.

<u>**שאלה 3**</u>

א. נתונות שתי מטריצות מעבר של שרשרות בעלות בלתי פריקות בנות 6 מצבים שהמחזור שלהם הוא 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 2

בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא 1, יש לכל מצב הסתברות סטציונרית של $\frac{1}{6}$ (למשל משיקולי סימטריה).

בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא 2, בהכרח חוזרים לראשונה למצב הראשון לאחר בדיוק 3 צעדים. לכן תוחלת זמן החזרה אליו היא 3 וההסתברות הסטציונרית שלו היא $\frac{1}{3}$.

ב. נראה שבמקרה זה, בהכרח יש מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$.

נבחר מצב שרירותי שנקרא לו מצב 1. כל המצבים מתחלקים ל 3 קבוצות. הראשונה היא קבוצת המצבים שנתן להגיע אליהם ממצב 1 בכפולות של 3 צעדים, השניה היא קבוצת המצבים שניתן להגיע אלהם בכפולות של 3 עם שארית 1 והשלישית היא קבוצת המצבים שניתן להגיע אליהם בכפולות של 3 עם שארית 2. שלושת הקבוצות אינן ריקות, כי בכל שלב יכולים להמצא לפחות במצב אחד. החיתוך בין כל שתיים מהקבוצות הוא ריק, כי אחרת, היה ניתן לחזור למצב 1 לא רק בכפולות של 3. סכום מספרי המצבים בקבוצות השונות הוא 5. לא יתכן שבכל אחת מהקבוצות יש לפחות שני מצבים (כי $5 < 2 + 2 + 2$). לכן בלפחות אחת מהן יש רק מצב אחד. במצב זה בהכרח מבקרים בכל צעד שלישי ולכן ההסתברות הסטצוינרית שלו היא $\frac{1}{3}$.

<u>שאלה 4</u>

אם ממצב 1 עוברים למצב 4 בצעד אי זוגי, אז בהכרח נמצאים במצב 3 בזמנים זוגיים. אם ממצב 1 עוברים למצב 4 בשלב זוגי, אז נמצאים במצב 3 רק בזמנים אי זוגיים. אם ממצב 1 עוברים באיזשהו שלב למצב 2, אז לעולם לא נמצאים במצב 3.

נחשב בשתי דרכים את סיכויי ההגעה למצב 4 בשלב זוגי.

<u>דרך ראשונה</u>

זהו סכום הטור $\sum_{k=0}^{\infty} 0.5^{2k} \cdot 0.2$ (עד אותו שלב צריך להשתהות במצב 1 מספר זוגי של צעדים).

<u>דרך שניה</u>

יהי a - סיכויי ההגעה ממצב 1 למצב 4 במספר אי זוגי של צעדים. מתקיים:

$$a = 0.5^2 a + 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0 + 0.2$$

אם פעמיים רצופות נשארים במצב 1, אז הסיכוי חוזר להיות שווה לסיכוי המקורי. אם בצעד הראשון או בצעד השני עוברים למצב 2, אז כבר לא נגיע למצב 3. אם משתהים צעד במצב 1 ואז עוברים למצב 4, אז לא נהיה במצב 3 בשלבים זוגיים. אם עוברים בצעד אחד למצב 4, אז כן נהיה בשלבים זוגיים במצב 3. כך תוך שני צעדים לכל היותר או שנופלת הכרעה או שחוזרים למצב ההתחלתי.

אפשר לפתור את השאלה גם בדרך נוספת:

בשרשרת זו, לכל המצבים הארגודים יש מחזור של 1 או 2. לכן, אם נעלה את מטריצת המעבר ברבוע, נקבל מטריצת מעבר Q של שרשרת שבה כל המחלקות הן לא מחזוריות. בשרשרת החדשה, נוכל לחשב את הסיכויים להגיע למצב 3 שהוא מצב סופג בשרשרת החדשה. כשמתחילים במצב 1, יש סיכוי להשאר בו בשלב הבא ויש סיכוי לעבור לכל אחת מהמחלקות של המצבים הנשנים. הסיכוי להגיע למצב 3, הוא $\frac{Q_{1,3}}{Q_{1,2}+Q_{1,3}+Q_{1,4}}$ (חשוב, מה קורה כאשר עוזבים את מצב 1).

העלאת מטריצת המעבר המקורית ברבוע נותנת מטריצה

$$Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)} = \frac{0.20}{0.45+0.20+0.10}$.

אפשר לראות את זה גם בדרך נוספת:

יהי a - סיכוי ההגעה למצב 3 בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא Q. מתקיים

$$a = 0.25a + 0.45 \cdot 0 + 0.20 \cdot 1 + 0.10 \cdot 0$$

(אם נשארים במצב הראשון, אז הסיכוי לא משתנה ובמקרים האחרים כבר מייד נופלת הכרעה).

שלומי