מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 8

שאלה 1

א. בשרשרת זו יש שתי מחלקות בלתי פריקות ובלתי מחזוריות של מצבים נשנים.
המחלקה הראשונה מכילה רק את המצב הסופג 1. המחלקה השניה מכילה את המצבים 4 ו 5.
מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{2,1}^{(n)} = a_2$, כאשר a_2 היא ההסתברות להגיע ממצב 2 למצב 1 (אם מגיעים למצב 1, אז תמיד נשארים בו).
מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{2,5}^{(n)} = (1-a_2)\pi_5$, כאשר (π_4,π_5) הוא הוקטור הסטציונרי במחלקה $\{4,5\}$.
(אם לא מגיעים ממצב 2 למצב 1, אז בהכרח מגיעים למחלקה $\{4,5\}$ ואז בתוך המחלקה $\{4,5\}$, ההסתברות הגבולית של מצב 5 היא π_5.
יהיו a_2 סיכוי ההגעה ממצב 2 למצב 1 ו a_3 סיכוי ההגעה ממצב 3 למצב 1.
מתקיים:

$$\begin{cases} a_2 = 0.06\cdot 1 + 0.04a_2 + 0.2a_3 + 0.3\cdot 0 + 0.4\cdot 0 \\ a_3 = 0.03\cdot 1 + 0.07a_2 + 0.21a_3 + 0.31\cdot 0 + 0.38\cdot 0 \end{cases}$$

מתקיים:

$$\begin{cases} \pi_4 = 0.5\pi_4 + \pi_5 \\ \pi_5 = 0.5\pi_4 \\ \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

ב. יהיו e_2 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 2 למחלקה של מצבים נשנים ו e_3 - תוחלת זמן ההגעה ממצב 3 למלקה של מצבים נשנים. מתקיים:

$$\begin{cases} e_2 = 1 + 0.06\cdot 0 + 0.04e_2 + 0.2e_3 + 0.3\cdot 0 + 0.4\cdot 0 \\ e_3 = 1 + 0.03\cdot 0 + 0.07e_2 + 0.21e_3 + 0.31\cdot 0 + 0.38\cdot 0 \end{cases}$$

(כאשר נמצאים במצב חולף, אז בכל מקרה עושים צעד ואחר-כך עוברים למצב כלשהו, אם זהו מצב נשנה אז יותר לא עושים צעדים).

ג. קיימת הסתברות חיובית שממצב 2 לא נגיע למצב 1. לכן לא קיים משתנה מקרי שמודד את זמן ההגעה למצב 1 ושמקבל רק ערכים סופיים. לכן, בודאי לא קיימת תוחלת זמן סופית להגעה ממצב 2 למצב 1.

שאלה 2

יהי a_1 ההסתברות להגיע ממצב 1 למצבים 3 או 4 במספר אי זוגי של צעדים או להגיע למצבים 5 ו 6 במספר זוגי של צעדים.
יהי a_2 ההסתברות להגיע ממצב 2 למצבים 3 או 4 במספר אי זוגי של צעדים או להגיע למצבים 5 ו 6 במספר זוגי של צעדים.
יהי $(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$ וקטור ההסתברויות הסטציונריות במחלקה היחידה של מצבים נשנים $\{3,4,5,6\}$.
זו מחלקה בעל מחזור של 2. ממצבים 3 ו 4 בהכרח עוברים למצבים 4 ו 5 ומאלה בהכרח עוברים ל 3 ו 4.
כדי להיות במצבים 4 ו 5 לאחר מספר זוגי של צעדים, צריך להגיע אליהם במספר זוגי של צעדים או להגיע ל 3,4 במספר אי זוגי של צעדים. אם זה קורה, אז שכיחות הביקורים במצב 5 בצעדים הזוגיים היא $\frac{\pi_5}{\pi_5+\pi_6}$. לכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{2,5}^{(5)} = a_2 \frac{\pi_5}{\pi_5+\pi_6}$.

מתקיים:

$$\begin{cases} a_1 = 0.04(1-a_1)+0.06(1-a_2)+0.18\cdot 1+0.02\cdot 1+0.30\cdot 0+0.40\cdot 0 \\ a_2 = 0.10(1-a_1)+0.20(1-a_2)+0.27\cdot 1+0.03\cdot 1+0.39\cdot 0+0.01\cdot 0 \end{cases}$$

למשל, אם מתחילים במצב 1, אז אם משתהים בו צעד אחד, אז כעת צריך להגיע ל 3,4 במספר זוגי של צעדים, או להגיע ל 5,6 במספר זוגי של צעדים. מכיון שיש רק מחלקה בלתי פריקה אחת שהמחזור שלה הוא 2, אז זה בדיוק המאורע המשלים לכך שמגיעים מ 1 ל 3,4 במספר אי זוגי של צעדים או ל 5,6 במספר זוגי. אם למשל עוברים למצב 3 בצעד אחד, אז מעתה נהיה ב 5,6 בצעדים הזוגיים. אם למשל עוברים למצב 6 בצעד אחד, אז לעולם לא נהיה ב 5,6 בצעדים זוגיים.

מתקיים:

$$\begin{cases} \pi_3 = 0.40\pi_5 + 0.70\pi_6 \\ \pi_4 = 0.60\pi_5 + 0.30\pi_6 \\ \pi_5 = 0.80\pi_3 + 0.10\pi_4 \\ \pi_6 = 0.20\pi_3 + 0.90\pi_4 \\ \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1 \end{cases}$$

בשאלה צוין שלא רצוי להשתמש בכפל מטריצות. אבל, נתן כאן גם דרך שמתבססת על העלאת מטריצת המעבר ברבוע.
המטריצה המתקבלת מהעלאת מטריצת המעבר ברבוע, היא מטריצת המעבר של התהליך בזמנים הזוגיים.
מטריצה זו היא

$$\begin{pmatrix} 0.04 & 0.06 & 0.18 & 0.02 & 0.30 & 0.40 \\ 0.10 & 0.20 & 0.27 & 0.03 & 0.39 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.90 \\ 0 & 0 & 0.40 & 0.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.70 & 0.30 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0076 & 0.0144 & 0.4234 & 0.3026 & 0.1814 & 0.0706 \\ 0.0240 & 0.0460 & 0.2350 & 0.2450 & 0.3270 & 0.1230 \\ 0 & 0 & 0.4600 & 0.5400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6700 & 0.3300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3800 & 0.6200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5900 & 0.4100 \end{pmatrix}$$

זו מטריצת מעבר של תהליך שבו מצב 5 נמצא במחלקה הלא מחזורית $\{5,6\}$.
יהי a_1 ההסתברות להגיע ממצב 1 למחלקה $\{5,6\}$.
יהי a_2 ההסתברות להגיע ממצב 2 למחלקה $\{5,6\}$.
יהי $\{\pi_5, \pi_6\}$ וקטור ההסתברויות הסטציונריות במחלקה $\{5,6\}$.
מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{2,5}^{(n)} = a_2\pi_5$.
מתקיים

$$\begin{cases} a_1 = 0.0076a_1 + 0.0144a_2 + 0.4234\cdot 0 + 0.3026\cdot 0 + 0.1814\cdot 1 + 0.0706\cdot 1 \\ a_2 = 0.0240a_1 + 0.0460a_2 + 0.2350\cdot 0 + 0.2450\cdot 0 + 0.3270\cdot 1 + 0.1230\cdot 1 \end{cases}$$

מתקיים

$$\begin{cases} \pi_5 = 0.3800\pi_5 + 0.5900\pi_6 \\ \pi_6 = 0.6200\pi_5 + 0.4100\pi_6 \end{cases}$$

<u>שאלה 3</u>

<u>דרך ראשונה</u>

זהו הילוך מקרי על גרף. למדנו שבהילוך מקרי על גרף קיימת לצומת a הסתברות סטציונרית $\frac{d_a}{D}$,

כאשר d_a היא דרגת צומת a ו D הוא סכום הדרגות ברכיב הקשירות של a.

לכן כאן $\pi_a = \frac{1}{1+3+2+2} = \frac{1}{8}$ ותוחלת זמן החזרה ל a היא $8 = \frac{1}{1/8}$.

<u>דרך שניה</u>

נחשב את ההסתברויות הסטציונריות של מצב a ללא שימוש בתנאי האיזון המפורט.

$$\begin{cases} \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = 1 \\ \pi_a = \frac{1}{3}\pi_b \\ \pi_b = \pi_a + \frac{1}{2}\pi_c + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_c = \frac{1}{3}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_d = \frac{1}{3}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_c \end{cases}$$

<u>דרך שלישית</u>

נחשב ישירות את תוחלת מספר הצעדים עד חזרה לצומת a.

יהיו e_a, e_b, e_c, e_d התוחלות של זמני ההגעה לצומת a מהצמתים השונים.

בכל מקרה עושים צעד ואז עוברים למצב אחר.

$$\begin{cases} e_a = 1 + e_b \\ e_b = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}e_c + \frac{1}{3}e_d \\ e_c = 1 + \frac{1}{2}e_b + \frac{1}{2}e_d \\ e_d = 1 + \frac{1}{2}e_b + \frac{1}{2}e_d \end{cases}$$

(משיקולי סימטריה $e_c = e_d$).

<u>שאלה 4</u>

עבור כל לוח יש תוחלת זמן חזרה סופית כי מדובר בשרשרת סופית שככזו היא נשנית חיובית. ניתן לבחור c_n כך ש $c_n n^2$ ישווה לתוחלת (תמיד אפשר להכפיל ב c_n מתאים, כך שהמכפלה תהיה מתאימה) . בכל לוח יש לפרופורציה של $\left(\frac{n-4}{n}\right)^2$ מהמשבצות דרגה 8 ולאחרות דרגה נמוכה יותר (לכל המשבצות שהן לא בשתי שורות קיצניות ולא בשתי עמודות קיצוניות, יש דרגה 8). לכן כאשר $n \to \infty$ הדרגה הממוצעת שואפת ל 8 ($\left(\frac{n-4}{n}\right)^2$ שואף ל 1 וזו הפרופורציה של צמתים בדרגה 8). לצומת פינתי יש תמיד דרגה 2. ההסתברות הסטציונרית שלו היא דרגתו חלקי סכום הדרגות. לכן עבור n גדול ההסתברות הסטציונרית קרובה ל $\frac{2}{8n^2}$ ואילו תוחלת זמן החזרה למצב קרובה ל $4n^2$.

לכן הקבוע המתאים הוא 4.

שלומי