

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 9

שאלה 1

א. תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $E(Z) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} > 1$. לכן נחפש למשוואה

$$t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$$

פתרון בקטע $0 < t < 1$. הפתרון הוא $t = 0.5$.

ב. הסיכוי שווה לסיכוי להכחדות בהינתן $(X_0 = 4)$. כדי שתהיה הכחדות, צריך שארבע שושלות בלתי תלויות יכחדו. הסיכוי לכך הוא 0.5^4 .

ג. אם יש k פרטים, אז סיכויי ההכחדות הם 0.5^k . לכן הסיכוי המבוקש הוא

$$\frac{1}{5} \cdot 0.5 + \frac{1}{5} \cdot 0.5^2 + \frac{1}{5} \cdot 0.5^3 + \frac{1}{5} \cdot 0.5^4 + \frac{1}{5} \cdot 0.5^5$$

ד. בהינתן $(X_3 = 1)$, התוחלת של X_5 היא $E^2(Z) = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ (כמו התוחלת של X_2 בהינתן $(X_0 = 1)$).

בהינתן $(X_3 = 6)$, התוחלת של X_5 היא $6E^2(Z) = 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$ (תוחלת סכום מספר הפרטים ב 6 שושלות, שווה לסכום התוחלות).

ה. מצב 0 הוא מצב סופג (לעולם לא עוזבים אותו). כמצב סופג הוא נשנה. מיתר המצבים יש מסלולים למצב 0 שממנו אין חזרה אליהם. לכן הם מצבים לא ארגודים וככאלה הם חולפים.
הערה:

ו. לא בהכרח מגיעים מהם למצב הנשנה היחיד. אפשר גם שגודל האוכלוסיה יתפוצץ - ישאף לאין סוף. מצב 4 הוא מצב חולף. לכן בהסתברות 1 נבקר בו רק מספר סופי של פעמים.

ז. יש מאורע שחוזרים למצב 4 אין סוף פעמים. יש אפילו מאורע שהחל מזמן מסוים, בכל דור יש 4 פרטים, אם תמיד לשני פרטים יש שני צאצאים וליתר הפרטים אין צאצאים. לכן המאורע שבאין סוף דורות, יש שני ארבעה פרטים, הוא מאורע לא ריק, למרות שההסתברות שלו היא אפס.

ח. לכל פרט יש מספר זוגי של צאצאים (0 או 2). לכן, תמיד גודל האוכלוסיה הוא זוגי. אי אפשר בכלל להגיע למצב 1 משום מצב. המאורע שמגיעים למצב 1 הוא מאורע ריק. למאורע ריק יש הסתברות אפס.

הערה:

לפי מה שאמרנו, קיים מרחב הסתברות שבו המאורע הוא ריק (אם Z מקבל רק את הערכים 0 ו 2). אבל ניתן לבחור מרחב הסתברות שייצג את התפלגות התהליך שבו המאורע אינו ריק. זה נעשה על-ידי כך שמוסיפים למרחב ההסתברות מאורעות בעלי הסתברות אפס שבהם אפשרי שיהיה לפרט צאצא אחד. במרחב הסתברות כזה, יתכן שלמאורע תהיה אותה הסתברות כמו במרחב הסתברות אחר.

שאלה 2

מספר הפרטים בדור 1, הוא מספר הצאצאים של הפרט היחיד שבדור 0. לכן מספר הפרטים בדור 1, הוא בעל התפלגות גיאומטרית.

לכל אחד מהפרטים שבדור 1, יש מספר צאצאים שמתפלג גיאומטרית. מספר הפרטים בדור 2 הוא סכום של מספר גיאומטרי של משתנים גיאומטריים שווי התפלגות ובלתי תלויים. עם מספר הצאצאים של פרט מתפלג $G(p)$, אז בדור השני יש מספר בעל התפלגות $G(p)$ של משתנים בעלי התפלגות $G(p)$.

נראה שסכום של מספר גיאומטרי עם פרמטר p של משתנים $G(p)$ מתפלג $G(p^2)$.

משתנה $G(p)$ מודד את הזמן עד קבלת הצלחה ראשונה בסדרת נסיונות ב"ת בעל הסתברות p . הסדרה נקטעת כאשר יש הצלחה. בסכום של משתנים, סופרים את הזמן עד קבלת הצלחה ואז אם בהמשך יש

משתנה נוסף, מתחילה ספירה עד קבלת הצלחה נוספת. בכל ספירה יש לפחות נסיון אחד (כי משתנה גיאומטרי לא יכול לקבל את הערך 0). כדי שנקודת זמן מסוימת תהיה אחרונה, צריך שבה תהיה הצלחה וצריך שלא יהיה משתנה נוסף בהמשך. כל ניסוי הוא הצלחה בסיכוי p וכל משתנה הוא אחרון בסיכוי p באופן ב"ת בהצלחות ובכישלונות.

שלומי