

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 10

שאלה 1

לתחנת שרות מגיעים צרכנים רק בזוגות, אך כל צרכן משורת בנפרד. הזוגות מגיעים בזרם פואסוני בעל קצב λ . בתחנה 3 שרתים שזמני השרות שלהם הם בלתי תלויים ומתפלגים כל אחד $\exp(1)$. בתחנה אינסוף מקומות המתנה וצרכן שלא נמצא עבורו שרת פנוי, ממתין בתור עד לקבלתו לשרות. מצאו את היוצר האינפניטיסימלי של השרשרת המבטאת את המספר הכולל של צרכנים שבמערכת (אלה שבשרות ואלה שממתינים לתורם).

שאלה 2

נתון תהליך מרקוב בזמן רציף בעל יוצר אינפניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת.
ב. את מטריצת המעבר של השרשרת בזמן בדיד המתאימה לתהליך הנתון בזמני הקפיצה שלו.
ג. מהי ההתפלגות הגבולית של השרשרת בסעיף ב' ?
ד. מהי הסיבה להבדל בין התשובה בסעיף א' לבין התשובה בסעיף ג' ?
ה. מצאו יוצר אינפניטיסימלי של שרשרת מרקוב בת 3 מצבים שאילו היינו שואלים לגביו את השאלות שבסעיפים הקודמים, היו התשובות בסעיפים א' ו ג' זהות.

שאלה 3

נתון תהליך מרקוב בזמן רציף בעל יוצר אינפניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאו שתי הצגות שונות של התהליך באמצעות טור של מטריצות עם שיעון פואסוני.

שאלה 4

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ובעלת יוצר אינפניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאו בשתי דרכים שונות את $P_{1,1}(t)$ עבור כל t קבוע (אחת הדרכים - באמצעות פתרון משוואה דיפרנציאלית).