מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 4

שאלה 1

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים $-\infty < i < +\infty$. מתקיים: $X_0 = 0$
ולכל $n \ge 0$: $X_{n+1} = X_n + b_n$, כאשר b_n הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים
$P(b_n = +3) = \frac{1}{4}$ ו $P(b_n = -1) = \frac{3}{4}$; זאת אומרת שבכל שלב בסכוי $\frac{1}{4}$ עושים שלושה
צעדים ימינה ובסכוי $\frac{3}{4}$ עושים צעד אחד שמאלה.

א. מהו המחזור של מצבי השרשרת ?
ב. הוכיחו שכל המצבים הם נשנים.

(רמז: תוכלו אם תרצו, להעזר בנוסחת סטרלינג: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.)

שאלה 2

תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$P(X_i = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X_i = 0) = \frac{3}{4}$ לכל $i \ge 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים
$X_1, X_2, X_3, \cdots$.

א. הראו שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$ עבור איזשהו n טבעי.

ב. הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$, אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

ג. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ $\frac{1}{4}$ לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

ד. הראו שהמנה $\frac{1}{4}$ תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

(רמז: תוכלו להסתמך על הטענה שהיה צריך להוכיח בסעיף ב' משאלה 1 וזאת גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה.)

ה. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

ו. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

<u>שאלה 3</u>

נתונה שרשרת מרקוב שבה גם מצבים נשנים וגם מצבים חולפים.
האם מכל מצב חולף מגיעים בהכרח באיזשהו שלב למצב נשנה ?

<u>א</u>. אם יש אינסוף מצבים חולפים.

<u>ב</u>. אם יש מספר סופי של מצבים חולפים.

<u>שאלה 4</u>

נניח שמצב ששמו מצב 1 הוא מצב נשנה בשרשרת סופית.
הראו שתוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 1 היא סופית.

<u>רמזים</u>

תוכלו להיעזר בתוצאה מהשיעור הראשון הסמסטר ובנוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל ערכים שלמים אי שליליים. נוסחא זו שאותה אינכם צריכים להוכיח, אומרת שאם X הוא משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים, אז $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$.
