פתרון תרגיל 10 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

$$\begin{array}{ccccccc}
-\lambda & 0 & \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & -(1+\lambda) & 0 & \lambda & 0 & & \\
0 & 2 & -(2+\lambda) & 0 & \lambda & & \\
0 & 0 & 3 & -(3+\lambda) & 0 & \lambda & \\
0 & 0 & 0 & 3 & -(3+\lambda) & 0 & \lambda \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & &
\end{array}$$

מדובר ביוצר מסדר אינסוף. מכיוון שאין יותר מ 3 שרתים, אז עצמת העזיבה אף פעם לא עולה על 3.
החל מהשורה החמישית, כל שורה היא הזזה במקום אחד של זאת שמעליה.

שאלה 2

א.

$$\begin{cases} (-2)\pi_1 + 2\pi_2 + 1\pi_3 = 0 \\ \pi_1 - 4\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 2\pi_2 - 2\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

ומתקיים $\pi_1 = \pi_3 = \frac{2}{5}$, $\pi_2 = \frac{1}{5}$

ב.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \\ \frac{2}{2+2} & 0 & \frac{2}{2+2} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ג. מדובר בשרשרת אי פריקה ולא מחזורית (ניתן לחזור לכל מצב לאחר שני צעדים וגם אחר שלושה צעדים). וקטור ההסתברויות הסטציונרי היחד הוא $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. לכן לכל מצב יש הסתברות גבולית של $\frac{1}{3}$.

ד. בזמני הקפיצות יש לכל מצב הסתברות גבולית של $\frac{1}{3}$, אך במצב 2 כל שהות היא בממוצע קצרה יותר מאשר במצבים האחרים. (משך זמן של שהות בודדת במצב 2 מתפלג $\exp(4)$ ובכל אחד מהמצבים האחרים משך שהות בודדת מתפלג $\exp(2)$).

ה.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

כאן לגבי כל המצבים יש אותה התפלגות של שהות רצופה: $\exp(2)$.

<u>שאלה 3</u>

צריך לבחור שעון עם קצב של לפחות 4.

נבחר שעון עם קצב $\lambda = 4$ ונקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-4t}\frac{(4t)^k}{k!}\begin{pmatrix} \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^k$$

או אם נבחר שעון בקצב $\lambda = 8$ נקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-8t}\frac{(8t)^k}{k!}\begin{pmatrix} \frac{6}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^k$$

<u>שאלה 4</u>

<u>דרך ראשונה:</u>

נמצאים במצב 1 זמן המתפלג $\exp(2)$ ואז עוזבים אותו ויותר לא חוזרים אליו (אין מסלול מהמצבים האחרים אליו). ההסתברות שניהיה בו תקופה ארוכה יותר מ t היא $P_{1,1}(t) = e^{-2t}$.

<u>דרך שניה:</u>

מתקיים $P_{1,1}'(t) = -2P_{1,1}(t) + (1 - P_{1,1}(t)) \cdot 0$

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הזאת הוא $P_{1,1}(t) = ce^{-2t}$ ולפי תנאי ההתחלה $P_{1,1}(0) = 1$ נקבל $c = 1$.

שלומי