פתרון תרגיל 11 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

כל האפשרויות יתכנו.

א. דוגמא לשרשרת מסוג זה מסדר אינסוף היא תהליך פואסון.
דוגמא לשרשרת סופית כזאת היא שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ב. שרשרת מסוג זה היא שרשרת עם היוצר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

אם מתחילים במצב הראשון אז הזמן עד הקפיצה הראשונה מתפלג $\exp(1)$ והזמן בין הקפיצה הראשונה לקפיצה השניה מתפלג $\exp(2)$.

ג. שרשרת בעלת היוצר

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

נניח שמתחילים במצב הראשון. במקרה זה הזמן עד הקפיצה הראשונה מתפלג $\exp(2)$. אחר קפיצה זו אם הגענו למצב 2 אז הזמן בין הקפיצה הראשונה לקפיצה השניה מתפלג $\exp(1)$ ואם הגענו למצב 3 אז הוא בעל התפלגות $\exp(2)$. לכן הזמן עד הקפיצה השניה מתפלג כסכום של משתנה מעריכי וקומבינציה של משתנים מעריכיים. קומבינציה של משתנים מעריכיים אינה משתנה מעריכי.

נתן גם המחשה מדוע עירוב של שני משתנים מעריכיים שוני פרמטר אינו בעל התפלגות מעריכית. אם זמן הצפיה לאירוע הוא בסיכוי שווה משתנה $\exp(1)$ או משתנה $\exp(2)$, אז בזמן 0 יש הסתברות $0.5(h+o(h))+0.5(2h+o(h))=1.5h+o(h)$ להתרחשות האירוע עד זמן h. אם האירוע לא התרחש עד זמן t, אז ההסתברות המותנה שמדובר בכל אחד משני המשתנים כבר אינן שוות. לכן ההסתברות שהאירוע יתרחש בזמן באורך h, כבר אינה $1.5h+o(h)$. למעשה, כאשר t שואף לאינסוף, אז ההסתברות המותנה שמדובר במשתנה בעל דרגת סיכון נמוכה, שואפת ל 1.

שאלה 2

א. מתקיים $P_{1,1}(0)=1$. מתקיים $P_{1,1}(h)=1-h+o(h)$.

מתקיים $-1 = \lim_{h\to 0}\frac{1-h+o(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{P_{1,1}(h)-P_{1,1}(0)}{h} = P_{1,1}'(0)$.

ב. מתקיים $P_{1,1}'(t)=-P_{1,1}(t)+2P_{1,2}(t)$ או $P_{1,1}'(t)=-P_{1,1}(t)+2(1-P_{1,1}(t))$ או $P_{1,1}'(t)=-3P_{1,1}(t)+2$.

למשוואה זו יש משפחת פתרונות $P_{1,1}(t)=ce^{-3t}+\frac{2}{3}$. לפי תנאי ההתחלה $P_{1,1}(0)=1$ מתקיים $P_{1,1}(t)=\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{2}{3}$.

לכן מתקיים $P_{1,1}^{/}(t)=-e^{-3t}$. מתקיים $\lim_{t\to\infty}P_{1,1}^{/}(t)=\lim_{t\to\infty}\left(-e^{-3t}\right)=0$.

<u>הערה</u>

התוצאה הזאת היא סבירה כי $P_{1,1}(t)$ שואף לגבול כאשר $t\to\infty$. אבל העובדה שפונקציה שואפת לגבול, לא אומרת שבהכרח הנגזרת שלה שואפת לאפס.

שלומי