פתרון תרגיל 12 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

יהי $y(t)$ - תוחלת מספר הפרטים בזמן t .

$$y'(t) = \lambda - \mu y(t)$$

הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + ce^{-\mu t}$$

כדי לעמוד בתנאי ההתחלה שהוא $y(0)=1$ צריך להתקיים:

$$c = \frac{\mu - \lambda}{\mu}$$

ולכן נקבל פתרון

$$y(t) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} e^{-\mu t}$$

שאלה 2

א. רצף המשתנים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב.

הצרכן הראשון מקבל במצבים 0 עד 8 זרם צרכנים בעל עוצמה ממוצעת קבועה והוא משרת אותם בעצמה קבועה. זו מערכת תור של שרת בודד עם מופע פואסוני ומשך שירות מעריכי עם 8 מקומות המתנה.

רצף המשתנים $Y(t)$ אינו שרשרת מרקוב.

בזמן 0 זמן העזיבה של מצב 0 לא מתפלג מעריכית. כדי לעזוב לראשונה את מצב 0 צריך שקודם יגיעו מספר צרכנים ומקומות ההמתנה שאצל הצרכן הראשון יתמלאו.

ב. $X(t)$ אף פעם לא גדול מ 9 (אף פעם לא מגיעים שני לקוחות באותו זמן בדיוק ולכן המחסום של 9 לא נשבר). לכן $X(t)$ לא שואף ל ∞ .

$X(t)$ היא שרשרת בזמן רציף בלתי פריקה בת קבוצת המצבים $\{0,1,2,\cdots,9\}$. לכן למצב 0 יש הסתברות גבולית חיובית.

לתחנה מגיעים צרכנים בקצב ממוצע של 2. אף פעם לא ניתן שירות בקצב ממוצע העולה על 2. רק כאשר שני השרתים הם פעילים אז ניתן שירות בקצב 2. אך השרת הראשון יהיה בטל בפרופורציה חיובית של הזמן. לכן לאורך זמן הזרם של המגיעים יהיה גדול מזרם המסיימים שרות (עבור כל $\varepsilon > 0$ קבוע החל מזמן מסוים תמיד יהיה המספר המצטבר של המגיעים לתחנה החל מזמן 0 ועד זמן זה שווה ליותר מ $(2-\varepsilon)t$ צרכנים, אך קיים $\varepsilon > 0$ שעבורו יסיימו שירות עד אותו שלב פחות מ $(2-2\varepsilon)t$). לכן, מספר הצרכנים שבתחנה ישאף לאינסוף. מכיון שמספר הצרכנים שאצל השרת הראשון הוא חסום, אז מספר הצרכנים שאצל השרת השני ישאף לאינסוף. לכן גם מתקיים $\lim_{t\to\infty} P(Y(t)=0)=0$.

<u>הערה</u>

ניתן גם לתת הסבר אחר. ראינו שהתהליך $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב סופית ובלתי פריקה. ניתן לחשב את ההסתברות הסטציונרית של המצב שבו לא מצטרפים צרכנים לתור הראשון. זו היא פרופורצית הצרכנים שפונה לשרת השני. מתקבל שלשרת השני פונה זרם בעל עוצמה ממוצעת של יותר מ 1. לכן, מספר הצרכנים שבתור שלו שואף לאינסוף.

שלומי