פתרון תרגיל 2 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. $P\left(X_n<\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$. $\sum\frac{1}{n}=\infty$ והמאורעות $\left(X_n<\frac{1}{n}\right)$ בלתי תלויים, לכן לפי הלמה של בורל קנטלי יתקיים $\left(X_n<\frac{1}{n}\right)$ אינסוף פעמים.

ב. $P\left(X_n<\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2}$. $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$, לכן לפי הלמה של בורל קנטלי יתרחשו רק מספר סופי של מאורעות.

ג. מתקיים $P\left(Y_n<\frac{1}{8n}\right)>P\left(X_n<\frac{1}{8n}\right)$, לכן מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n}=\infty$ = $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(X_n<\frac{1}{8n}\right)$ אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(Y_n<\frac{1}{8n}\right)=\infty$. אך ה Y_n אינם ב"ת ולכן לא ניתן להסיק לפי הלמה של בורל קנטלי, אם מתרחשים אין סוף מהם. ניתן להתגבר על הקושי הזה, אם מסתכלים רק על ה Y_n במקומות הזוגיים. קבוצה זו של משתנים הם ב"ת ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(Y_{2n}<\frac{1}{8\cdot 2n}\right)=\infty$ ולכן בהסתברות 1 מתרחשים אין סוף מהם.

<u>דרך נוספת</u>

$P\left(X_n<\frac{1}{8n}\right)=\frac{1}{8n}$ ו $\sum\frac{1}{8n}=\infty$. לכן יתרחשו מספר אינסופי של מאורעות $\left(X_n<\frac{1}{8n}\right)$. מכיון שתמיד $\left(Y_n\le X_n\right)$ אז עבור כל $\left(X_n<\frac{1}{8n}\right)$ יתקיים גם $\left(Y_n<\frac{1}{8n}\right)$. לכן אינסוף פעמים יתקיים $\left(Y_n<\frac{1}{8n}\right)$.

שאלה 2

מחיקת מספרים שונים היא בלתי תלויה אחת בשניה. ההסתברות למחוק מספר בן n ספרות היא p^n .
יש $9\cdot 10^{n-1}$ מספרים בני n ספרות. נגדיר את $A_{n,t}$ כמאורע שימחק מספר t בן n ספרות.

$$\sum_n\sum_t P\left(A_{n,t}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{9\cdot 10^{n-1}}p^n=9p\sum_{n=1}^{\infty}\left(10p\right)^{n-1}$$

הטור הזה מתכנס עבור $p<0.1$. המאורעות הם בלתי תלויים. לכן לפי הלמה של בורל קנטלי יהיה מספר אינסופי של מאורעות אם ורק אם $p\ge 0.1$.

<u>שאלה 3</u>

נגדיר סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. A_n - לאחר הצעד ה- $2n$ נהיה במצב 0. ההסתברות של כל מאורע כזה היא 0.5 והמאורעות הם בלתי תלויים. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0.5 = \infty$. לכן בהסתברות 1, אינסוף פעמים נבקר במצב 0 ומצב 0 הוא נשנה.

<u>שאלה 4</u>

כן.

נגדיר סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ שבה לכל $n \ge 2$ מתקיים $P(X_n = 0) = 1$ ולגבי המשתנה X_1 מתקיים $P(X_1 = k) = \frac{c}{k^4}$ עבור $1 \le k < \infty$ שלמים ועבור $-\infty < k \le -1$ שלמים

(כך ש $\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{c}{k^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^4} = 1$).

למשתנה X_1 יש תוחלת סופית ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^4} k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^3} < \infty$, $\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{c}{k^4} k = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{c}{k^3} > -\infty$).

התוחלת של משתנה זה היא אפס.

למשתנה X_1 יש מומנט רביעי אין סופי ($\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{c}{k^4} k^4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^4} k^4 = \infty$).

המשתנה הזה מקבל בכל מקרה ערך סופי. עבור כל ערך סופי שהוא מקבל, הממוצע של הסדרה שואף לאפס שזה התוחלת של כל המשתנים.

שלומי