

פתרון תרגיל 3 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

נראה שהחוק החזק חל על הסדרה בכל מקרה וגם אם המשתנים הם תלויים.

$$\text{יהי } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ . עבור כל } n \text{ מתקיים } E(S_n) = 0 \text{ . לכן גם } E\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0 \text{ .}$$

עבור כל n , הערך הכי גדול שיכול לקבל $|S_n|$ חסום על-ידי 9 , כאשר $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 9$, הוא גודל שרירותי.

לכן עבור $n > \frac{9}{\varepsilon}$ סדרת הממוצעים כבר לא יכולה לסטות מהתוחלת שלה ביותר מ ε .

לכן, עבור כל $\varepsilon > 0$ הסטייה תהיה גדולה מ ε רק מספר סופי של פעמים.

שאלה 2

המיקום בשלב ה- n הוא S_n כאשר $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ כאשר $P(X_i = +1) = P(X_i = -1) = 0.5$

והמשתנים בלתי תלויים. החוק החזק חל על הסדרה. התוחלת של כל אחד מהמשתנים היא 0.

על-פי החוק החזק, סדרת הממוצעים $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ תסטה מ 0 ביותר מ ε רק מספר סופי של פעמים, זאת

עבור כל $\varepsilon > 0$. אך זה לכשעצמו לא אומר עדיין מספיק על S_n . מספיק ש S_n יקבל ערכים קטנים ולא

בהכרח ערכי 0 כדי שהממוצע יתקרב ל 0 . כך ששימוש ישיר בחוק החזק איננו מספיק כאן.

נראה בשיעור שהשרשרת היא נשנית. אבל שימוש ישיר בחוק החזק לא מספיק כדי להוכיח זאת.

שאלה 3

נגדיר שרשרת שמרחב המצבים שלה הוא כל השלמים.

עבור i זוגי: $P_{i,i+1} = 1$ ועבור i אי-זוגי: $P_{i,i} = 1$.

המצבים האי זוגיים הם נשנים כי תמיד נשארים בהם כשמתחילים בהם. כל מצב זוגי הוא חולף כי עוזבים אותו בהסתברות 1 ויותר לא חוזרים אליו.

הוכחנו שבמחלקה אי פריקה או שכל המצבים נשנים או שכל המצבים חולפים. אבל כאן ראינו

שבשרשרת מרקוב יתכן שיש מצבים משני הסוגים ואפילו אינסוף מצבים משני הסוגים.

שאלה 4

נתאר שרשרת כזאת על השלמים האי שליליים.

עבור מצב 0 מתקיים $P_{0,i} = \frac{1}{i(i+1)}$ עבור כל $i \geq 1$ שלם (מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$) .

עבור כל $i \geq 1$ מתקיים $P_{i,i-1} = 1$.

השרשרת הזאת היא מחלקה אחת בלי פריקה.

הסבר

מכל מצב חייבים לחזור למצב 0 (ממצב i חוזרים למצב 0 ב i צעדים) וממצב 0 יש מסלול (אפילו ישיר) לכל מצב אחר.

למצב 0 ניתן לחזור בשני צעדים (אם הולכים מ 0 ישירות למצב 1) . ניתן גם לחזור אליו בשלושה

צעדים (אם הולכים ממנו ישירות למצב 2) . מכיון שהמחלק המשותף המכסימלי של 2 ושל 3 הוא 1 , אז

מצב 0 הוא לא מחזורי. מכיון שאי מחזוריות היא תכונה מחלקתית. אז כל המצבים הם כאן לא מחזוריים.

נשים לב שממצב i לא ניתן לחזור לעצמו בפחות מ $i + 1$ צעדים (חייבים לשם כך לעשות i צעדים
ממצב i למצב 0).

שלומי