פתרון תרגיל 4 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. כדי לחזור ממצב 0 למצב 0 , מספר הצעדים שמאלה צריך להיות שווה לשלוש פעמים מספר הצעדים ימינה. לכן ניתן לחזור למצב 0 רק במספר צעדים שהוא כפולה של 4. ניתן לחזור למצב 0 ב 4 צעדים. לכן המחזור של מצב 0 הוא בדיוק 4. השרשרת היא אי-פריקה ובשרשרת אי פריקה לכל המצבים יש את אותו מחזור לכן המחזור של כל המצבים הוא 4.
ננמק את אי הפריקות: עבור זוג מצבים $j>i$, ניתן להגיע מ j ל i על-ידי $j-i$ צעדים שמאלה. ניתן להגיע מ i ל j על-ידי $j-i$ צעדים של $+3$ ו $2(j-i)$ צעדים של -1.

ב. נשנות היא תכונה מחלקתית. מכיוון שהשרשרת היא אי-פריקה אז די להראות שמצב 0 הוא נשנה.
נשתמש בקריטריון לנשנות. נבדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(n)} = \infty$. למעשה ניתן לחזור למצב 0 רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה של 4, לכן יש לבדוק אם מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(4n)} = \infty$. מתקיים

$$P_{0,0}^{(4n)} = \binom{4n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{3n} = \frac{(4n)!}{n!\cdot(3n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{3n} \overset{stirling}{\cong}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi 4n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}}{\sqrt{2\pi 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{3n}$$

ולזה יש סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ לכן מצב 0 הוא נשנה וכל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

שאלה 2

א. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

ב. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2\cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1,p_1,q_2,p_2
נבחר n כך ש $q_2\cdot 10^n \ge q_1$ וגם $p_2\cdot 10^n \ge p_1$ וגם $q_2\cdot 10^n - p_2\cdot 10^n \ge q_1 - p_1$.
המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2\cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2\cdot 10^n - p_1$ פעמים.

ג. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{4}$ זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon>0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ $\frac{1}{4}$ בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ $\frac{1}{4}$ מרוחק מ $\frac{1}{4}$ ב $\varepsilon = \left|\frac{1}{4}-\frac{p}{q}\right|$.

ד. הוכחנו בשאלה 1 שכאשר בכל שלב הולכים שלושה צעדים ימינה בסיכוי $\frac{1}{4}$ ושמאלה בסיכוי $\frac{3}{4}$,

אז השרשרת היא נשנית. לכן חוזרים לנקודת ההתחלה ∞ פעמים. זאת אומרת ש ∞ פעמים תהיה פרופרצית מספר הפעמים שהלכנו ימינה שווה בדיוק ל $\frac{1}{4}$. כך כאן עבור ∞ ערכי n תהיה פרופורצית מספר המשתנים עד אליו שיקבלו את הערך 1 שווה ל $\frac{1}{4}$.

<u>הערה</u>

בסעיף זה לא ניתן להשתמש בחוק החזק. אמנם לפי החוק החזק, הממוצע שואף ל $\frac{1}{4}$, אבל זה לא אומר שהערך $\frac{1}{4}$ מתקבל אין סוף פעמים או מתקבל בכלל.

<u>ה.</u> לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה $\frac{1}{4}$ מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

<u>ו.</u> $P\left(\frac{S_3}{3}=\frac{2}{3} \mid \frac{S_2}{2}=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}>0 \quad , \quad P\left(\frac{S_5}{5}=\frac{2}{3} \mid \frac{S_4}{4}=\frac{1}{2}\right)=0$

(מדובר בהסתברויות מותנות).

מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

<u>שאלה 3</u>

נתן דוגמא שתראה שבשרשרת אין סופית זה לא בהכרח קורה:

שרשרת בעלת מרחב מצבים שהם השלמים האי שליליים. נניח שמתקיים $P_{0,0}=1$ ועבור כל $i\geq 1$ מתקיים $P_{i,i+1}=1$. את מצב 0 לעולם לא עוזבים כאשר נמצאים בו. לכן הוא מצב משנה (מצב סופג).

מכל מצב i עוברים בהסתברות 1 למצב $i+1$. לכן כל מצב $i\neq 0$ הוא חולף כי לעולם לא נחזור אליו לאחר שמתחילים בו.

בשרשרת סופית זה לא יתכן:

בכל מצב נבקר רק מספר סופי של פעמים. יש רק מספר סופי של מצבים, לכן מספר הביקורים הכולל במצבים חולפים הוא סופי. אך בתהליך כולו לאורך זמן יש אינסוף שלבים ולכן יש אין סוף ביקורים במצבים שונים (בכל שלב מבקרים באיזשהו מצב).

<u>שאלה 4</u>

ראינו שעבור מצב ארגודי בשרשרת סופית בת M מצבים , קיים קבוע $0<a\leq 1$, כך שההסתברות לא לחזור למצב בשום שלב עד שלב n אינה גדולה מ $(1-a)^{\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor}$.

לפי נוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים, תוחלת זמן החזרה למצב i לא גדולה מ $E(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}P(Z\geq n)\leq \sum_{n=1}^{\infty}(1-a)^{\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor}<\infty$.

שלומי