

## פתרון תרגיל 5 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

### שאלה 1

ממצב 0 עוברים למצב  $i$  בהסתברות  $0.5^{i+1}$  ואז יש מהלך אחד למצב  $i$  ו  $i$  מהלכים בחזרה ובסך הכל  $i+1$  מהלכים. תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא  $\sum_{i=0}^{\infty} 0.5^{i+1}(i+1)$ . ההסתברות שמספר הצעדים עד חזרה יהיה  $i+1$  היא  $0.5^{i+1}$  ולכן מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 מתפלג  $G(0.5)$  ולכן הוא בעל תוחלת 2. נעזרנו בתוצאה ידועה לגבי חישוב תוחלת של משתנה מקרי כדי לסכם טור. מכיון שתוחלת זמן החזרה למצב 0 מעצמו היא סופית אז הוא מצב נשנה חיובי. מצב 0 אינו מחזורי (ניתן לחזור אליו בצעד אחד). למצב נשנה חיובי ולא מחזורי יש הסתברות גבולית ששווה ל 1 חלקי תוחלת זמן החזרה אליו.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,0}^{(n)} = \frac{1}{E_0} = \frac{1}{2}$$

### שאלה 2

בתרגיל 4 שאלה 4 ראינו שתוחלת זמן החזרה לכל מצב נשנה בשרשרת סופית היא סופית. לפי ההגדרה, מצב שתוחלת זמן החזרה אליו היא סופית הוא נשנה חיובי.

### שאלה 3

נתן דוגמא לשרשרת שבה המצבים הם נשנים חיובית ושבה אין הסתברות גבולית למצבים. הדוגמא היא של שרשרת בת שני המצבים 1 ו 2 ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכל מצב בהכרח חוזרים בשני צעדים. לכן תוחלת זמן החזרה היא 2 והמצבים נשנים חיובית. מתקיים עבור כל  $n$ :  $P_{1,1}^{(2n)} = 1$ ,  $P_{1,1}^{(2n+1)} = 0$  ולכן מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(2n)} = 1$  ו  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,1}^{(2n+1)} = 0$ . לכן לא קיימת הסתברות גבולית.

### הערה

כל דוגמא של מצב נשנה חיובי ומחזורי תתאים כאן.

לגבי מצב חולף  $i$  מתקיים לפי הגדרת מצב חולף  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} < \infty$ . בטור של איברים אי שליליים שמתכנס, האיברים שואפים לאפס. לכן מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$  ובהכרח קיים הגבול.