פתרון תרגיל 8 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $0.2\cdot 0+0.4\cdot 1+0.4\cdot 2>1$ לכן התהליך נכחד בהסתברות שהיא גדולה מאפס וקטנה מ 1. מבוקש הפתרון של המשוואה $t=0.2+0.4t+0.4t^2$ שמקיים $0<t<1$. פתרון זה הוא 0.5.

ב. הסתברות זו שווה להסתברות להכחדות בהינתן $(X_0=3)$. זו ההסתברות ששלוש שושלות כמו זו המתוארת בסעיף א' יכחדו. הודות לאי תלות, ההסתברות המבוקשת היא $0.5^3=\frac{1}{8}$.

ג. $\frac{1}{3}\cdot 0.5+\frac{1}{3}\cdot 0.5^2+\frac{1}{3}\cdot 0.5^3$

שאלה 2

נפריך את שתי הטענות. שימו לב שלא נאמר שהתהליכים הם בלתי תלויים. לכן ניתן היה לתת דוגמאות עם תהליכם תלויים. אך נתן דוגמאות עם תהליכים בלתי תלויים.

א. נניח שלכל פרט יש 0 או 1 או 2 צאצאים. יש לו 0 צאצאים בהסתברות $\frac{1}{a}$, שני צאצאים בהסתברות $\frac{1}{a^2}$ וצאצא אחד בהסתברות $1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}$ ($1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}>0$). מכיוון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט קטנה מ 1 אז השושלות יכחדו בהסתברות 1 עבור כל a מתאים. אבל אם נשאיף את a ל ∞, אז בכל דור שבו עדיין אין הכחדות, הסיכוי להכחדות מידית בדור הבא שואפת לאפס. לכן ההסתברות שהשושלת השניה תכחד בדיוק בדור שבו הראשונה נכחדת שואפת לאפס. לכן כאשר $a\to\infty$ ההסתברות שהשושלות יכחדו בדורות שונים שואפת ל 1. משיקולי סימטריה ההסתברות שהראשונה תכחד לפני השניה שואפת ל 0.5.

ב. נניח שבכל אחת משתי השושלות יש לגבי כל פרט הסתברות של 0.5 ל 0 צאצאים והסתברות של 0.5 ל m צאצאים. עבור כל $m>2$ ההסתברות שלא תהיה אף פעם הכחדות היא גדולה מ 0. לכן כאשר $m\to\infty$ אם אין הכחדות מיד בהתחלה אז בהסתברות ששואפת ל 1 לא תהיה כבר הכחדות. לכן לגבי כל שושלת ההסתברות שהיא תכחד תשאף ל 0.5. ההסתברות שהיא תכחד ושהשניה לא תכחד כבר באותו שלב תשאף ל $0.5\cdot 0.5=0.25$ כאשר $m\to\infty$.

שאלה 3

נניח שעבור כל $i\ge 5$ ועבור כל $i\le -1$ מתקיים $P_{i,i}=1$ ובנוסף $P_{0,2}=P_{1,2}=P_{2,3}=P_{3,4}=1$ ו $P_{4,-1}=P_{4,5}=0.5$.

בכל אחד משני המקרים מתקיים בהסתברות 1 : $X_1=2, X_2=3, X_3=4$. בהסתברות 0.5 מתקיים $X_4=5$ ובהסתברות 0.5 מתקיים $X_n=-1$ עבור כל $n\ge 4$.

שלומי