פתרון תרגיל 9 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & \\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & \\ 0 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 \\ . & . & . & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

השרשרת לא פריקה. מספר הלקוחות הממוצע שמגיעים ביחידת זמן שרות הוא
$0.5\cdot 0+0.4\cdot 1+0.1\cdot 4=0.8$ וכך הוא קטן מ 1, לכן השרשרת נישנת חיובית. נחשב את תוחלת זמן החזרה ממצב אפס למצב אפס:

$$E_0=0.5\cdot 1+0.4(E_{1,0}+1)+0.1(E_{4,0}+1)$$
$$E_{4,0}=4E_{1,0}$$

על פי השיוויון בין שתי השורות הראשונות אפשר לראות שתוחלות זמני החזרה למצב 0 ממצבים 0 ו 1 הן שוות.

$$E_{1,0}=0.5\cdot 1+0.4(E_{1,0}+1)+0.1(4E_{1,0}+1)$$
$$E_{1,0}=5\Rightarrow E_0=5\Rightarrow \pi_0=\frac{1}{5}$$

התוצאה הזאת מתאימה לתוצאה המתקבלת לפי הנוסחא $\pi_0=1-E(Z)$ כאשר Z הוא המשתנה המייצג את מספר הלקוחות הבאים ביחידת זמן.

לשם חישוב הרכיבים המבוקשים של הוקטור הסטציונרי נשתמש בשתי משוואות.

$$\begin{cases} \pi_0=0.5\pi_0+0.5\pi_1 \\ \pi_1=0.4\pi_0+0.4\pi_1+0.5\pi_2 \end{cases}$$

משתי משוואות אלה ומתוצאת החישוב הקודם שעשינו ל π_0 נקבל ש $\pi_0=\pi_1=0.2$, $\pi_2=0.08$.

שאלה 2

נסתכל על שני מאורעות: הראשון הוא ביקור בנקודות 2015 ו 2017. השני הוא שהנקודה הראשונה שבה מבקרים החל מ 6000 היא לא 6000 ולא 6001 . בגלל המרחק הרב שבין הנקודות אז שני המאורעות הם כמעט ב"ת.

ההסתברות שנבקר ב 2015 היא בקירוב $\frac{1}{3.5}$ (כי המספר הראשון החל מ 2015 שבו מבקרים צריך להיות 2015). כאשר נמצאים ב 2015 צריך לקבל תוצאה של 2 או רצף של שתי תוצאות 1. לכך ההסתברות היא $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$. לכן ההסתברות של המאורע הראשון היא בקירוב $\frac{1}{3.5}\cdot\frac{7}{36}$.

ההסתברות של המאורע השני היא בקירוב $1-\frac{1}{3.5}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$ (הראשון החל מ 6000 הוא לא 6000 ולא 6001).

לכן התשובה המבוקשת היא $\frac{1}{3.5}\cdot\frac{7}{36}\left(1-\frac{1}{3.5}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3.5}\right)$.

<u>שאלה 3</u>

נרצה להראות שהסכום של שני משתנים פואסונים ב"ת בעלי פרמטרים λ ו μ, הוא משתנה פואסוני בעל פרמטר $\lambda+\mu$.

נתון תהליך פואסון בעל פרמטר λ. לפי מה שראינו בכיתה התפלגות מספר האירועים ביחידת זמן אחת היא פואסונית עם פרמטר λ.

נתון תהליך פואסון בעל פרמטר μ. באופן דומה, התפלגות מספר האירועים ביחידת זמן אחת היא פואסונית עם פרמטר μ.

מספר האירועים הכולל בשני התהליכים מתפלג כסכום של משתנים מקריים פואסונים ב"ת בעל פרמטרים λ ו μ.

נראה שהתהליך המונה את מספר האירועים לאורך זמן מקיים את ההנחות של תהליך פואסון שהוא בעל קצב של $\lambda+\mu$. מכאן יתקבל שמספר האירועים ביחידת זמן אחת הוא גם בעל התפלגות פואסונית עם פרמטר $\lambda+\mu$.

- בזמן אפס לא היו עדיין אירועים.
- ההסתברות לקפיצה בקטע זמן באורך h היא $(\lambda+\mu)h+o(h)$.
- הודות לאי תלות בין שני התהליכים, ההסתברות ללפחות שתי קפיצות בקטע זמן באורך h היא $o(h)$.
  הסבר לכך:
  ראינו בכיתה שההסתברות שבאותו תהליך תהיה יותר מקפיצה אחת היא $o(h)$. בנוסף ההסתברות שיהיו קפיצות בשני התהליכים היא $(\lambda h+o(h))(\mu h+o(h))$ שזה $o(h)$.
- יש אי תלות בין מספרי הקפיצות בפרקי זמן זרים.
