<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הקדמה</u>

שלומי

הקורס יעסוק בעיקר בסוג מסוים של תהליכים סטוכסטיים שנקראים שרשרות מרקוב.
נוכיח בנוסף מספר קטן של תוצאות לגבי תהליכים סטוכסטיים כלליים. בחלק מהתוצאות האלה נעשה שימוש בעיסוק בשרשרות מרקוב. אך יש ענין גם בעיסוק בהם לכשעצמם.

<u>הגדרה:</u>
תהליך סטוכסטי הוא סדרת משתנים מקריים או רצף של משתנים מקריים.
בקורסים קודמים עסקתם בעיקר במשתנים מקריים בודדים (חד מימדיים) או במשתנים מקריים בעלי מספר מימדים.
כאן נעסוק בסדרה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ או ברצף של משתנים מקריים X_t כאשר $0 \le t < \infty$.
כל משתנה יכול לקבל ערך מתוך קבוצה נתונה של ערכים.
<u>הגדרה:</u>
קבוצת הערכים האפשריים של המשתנים תקרא קבוצת המצבים של התהליך.
כפי שאמרנו, נעסוק באוסף בן מניה של משתנים או ברצף של משתנים. קבוצת המצבים תהיה בשני המקרים סופית או בת מניה.
<u>דוגמא לתהליך סטוכסטי:</u>
בכל שלב מטילים מטבע. יהי X_n שווה לתוצאה שמראה המטבע. אם התוצאות האפשריות הן 0 ו 1 , אז $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא תהליך סטוכסטי בעל מרחב מצבים $\{0,1\}$.
אם למשל ידוע שתוצאות המטבעות הן בלתי תלויות אז יש לנו תהליך סטוכסטי של סדרת משתנים בלתי תלויים.
אם יש חוקיות אחרת לגבי התוצאות אז יש תהליך סטוכסטי אחר.
<u>דוגמא לתהליך סטוכסטי בזמן רציף:</u> יהי X_t מספר הלקוחות אצל כספר בבנק בזמני t השונים לאחר הפתיחה.
הרצף של המשתנים X_t מתאר את כל מה שקרה אצל הכספר.

<u>שרשרות מרקוב בזמן בדיד</u>

<u>הגדרה:</u>
על סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ חלה תכונת המרקוביות אם מתקיים עבור כל i, j

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

עבור כל ערכים אפשריים של המשתנים הקודמים.
<u>הסבר:</u>
תכונת המרקוביות אומרת שכל המידע על הערך שיקבל X_{n+1} נמצא בערכו של X_n .
זאת אומרת שאם אנו יודעים את ערכו של X_n אז המידע הקודם כבר לא רלוונטי.
<u>הערה:</u>
אמרנו שהערכים של המשתנים הקודמים כבר לא רלוונטים, אבל עדיין לא אמרנו שערכו של n לא רלוונטי.
<u>שאלה:</u>
האם זה אומר ש X_n בלתי תלוי ב X_{n-2} ?
<u>תשובה:</u> לא
<u>הסבר לתשובה:</u>
נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי על הישר. בהילוך המקרי הולכים על השלמים שעל הישר. בכל שלב באופן בלתי תלוי בשלבים האחרים בסיכוי 0.5 הולכים יחידה אחת ימינה ובסיכוי 0.5 יחידה שמאלה. כך אם ידוע ש $(X_{16} = 14)$ זה אומר בהכרח ש $P(X_{17} = 15) = P(X_{17} = 13) = 0.5$.

אבל ברור ש X_{17} כן תלוי ב X_{15}. אם למשל ידוע ש X_{15} הוא שלילי אז X_{17} לא יכול לקבל את הערך 9. אך כללית הוא כן יכול לקבל את הערך 9.

הגדרה:

הומוגניות בזמן היא תכונה שאומרת שהסתברויות המעבר גם לא תלויות בזמן (זאת אומרת באינדקס של המצב). זאת אומרת שעבור כל n,m ועבור כל i : התפלגות X_{n+1} בהינתן $(X_n = i)$ זהה להתפלגות X_{m+1} בהינתן $(X_m = i)$.

דוגמא לתהליך מרקובי שאינו הומוגני בזמן:

הילוך מקרי שבו בכל בשלב ה-n הולכים בהסתברות $\frac{1}{2^n}$ ימינה ובסיכוי המשלים $1-\frac{1}{2^n}$ הולכים שמאלה, באופן בלתי תלוי בשלבים האחרים.

הסבר: כאן כל המידע הרלוונטי לגבי ערכו של X_{n+1} נמצא בערכו של X_n, אך התפלגות X_{17} בהינתן $(X_{16} = 0)$ אינה זהה להתפלגות X_5 בהינתן $(X_4 = 0)$.

הגדרה:

תהליך סטוכסטי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שמקיים את תכונות המרקוביות וההומוגניות בזמן נקרא שרשרת מרקוב. זהו סוג התהליכים שבו נעסוק ברוב הקורס.

הגדרת מטריצת מעבר של תהליך מרקוב:

כאשר יש שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, אז יש מטריצה רבועית שמתארת את הסתברויות המעבר ממצב למצב. לגבי כל מצב יש שורה שבה רשומות הסתברויות המעבר ממצב למצב.

תיאור של מטריצות מעבר:

המטריצה היא מסדר סופי אם קבוצת המצבים היא סופית ויכולה להיות מסדר אינסופי אם יש מספר בן מניה של מצבים. סכום האיברים בכל שורה הוא 1 כי סכום ההסתברויות לעבור למצבים השונים מכל מצב נתון הוא 1. אברי האלכסון מייצגים את ההסתברויות להישאר במצבים השונים. כמובן שכל אברי המטריצה הם אי שליליים.

דוגמאות לשרשרות מרקוב

1. סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבעות הוגנים. זו שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

2. נתונים שני כדים ושלושה כדורים: בכל שלב בוחרים כדור אקראי ומעבירים אותו לכד האחר. כאן יש לנו שרשרת בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2,3\}$, כאשר כל מצב מייצג את מספר הכדורים בכד הראשון בשלב נתון. מטריצת המעבר היא:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

3. הילוך מקרי על הישר כאשר בכל שלב הולכים ימינה בסיכוי p ושמאלה בסיכוי $1-p$ באופן בלתי תלוי בשלבי הקודמים: כאן יש מספר אינסופי של מצבים שמייצגים את השלמים. במטריצת המעבר כל אברי האלכסון שמימין לאלכסון הראשי שווים ל p וכל אברי האלכסון שמשמאל לאלכסון הראשי שווים ל $q = 1-p$. יתר אברי המטריצה שווים לאפס.

התהליך הוא $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ועבור כל n: $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$ כאשר עבור כל i מתקיים

$P(Z_i=+1)=p=1-P(Z_i=-1)$ והמשתנים Z_i הם בלתי תלויים. שימו לב שיש כאן חשיבות למצב ההתחלתי וזאת בניגוד לדוגמא הראשונה שנתנו של הטלות של מטבע הוגן שבה אין לתוצאות קודמות כל השפעה על הבאות.

4. לדן יש סכום התחלתי של 3 שקלים ולערן יש סכום התחלתי של 2 שקלים. בכל שלב כל עוד אף אחד מהם לא התרושש, כל אחד מהם שם שקל אחד על השולחן. מתקיימת הגרלה בה דן זוכה בסכום שעל השולחן בסיכוי p וערן זוכה בו בסיכוי $q=1-p$. התהליך מסתיים כאשר אחד מהם מתרושש. יש כאן שרשרת בת 6 מצבים, כאשר מצב i מייצג את המצב שבידי דן יש i שקלים. מטריצת המעבר נראית כך:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

מצבים 0 ו 5 הם מצבים שאם מגיעים אליהם, אז לא עוזבים אותם יותר.

<u>הגדרה:</u>

מצב סופג הוא מצב שאם מגיעים אליו אז יותר לא עוזבים אותו.

5. כאן גם מתרחש הימור של דן, אך מולו עומדת קופה אינסופית. כאן במטריצת המעבר שהיא אינסופית השורה הראשונה היא של 1 בודד ואחר-כך רק אפסים. לגבי כל שורה אחרת i האיבר $P_{i,i-1}$ במטריצת המעבר P שווה ל q , האיבר $P_{i,i+1}$ שווה ל p ויתר האיברים שווים לאפס.

כאן יש רק מצב סופג אחד.

6. שרשרת של תור עם שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. לתור מופעים בכל יחידת זמן i לקוחות בהסתברות a_i. השרת משרת ביחידת הזמן לקוח אם בתחילת יחידת הזמן היה לקוח בתחנה.

מטריצת המעבר האינסופית תראה כך:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \end{matrix}$$

שתי השורות הראשונות הן זהות. אחר-כך כל שורה היא הזזה במקום אחד של השורה שמעליה.

<u>שאלה</u>

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים $\{1,2,3\}$. נגדיר תהליך סטוכסטי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$$Y_n=\begin{cases} a & X_n\in\{1,2\} \\ b & X_n=3 \end{cases}$$

האם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא בהכרח שרשרת מרקוב ?

תשובה: לא. למרות שבמקרים מסוימים יתכן שכן.

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית. נגדיר שרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים $P(Y_2 = b \mid Y_0 = a, Y_1 = a) = 1$ אך $P(Y_2 = b \mid Y_0 = b, Y_1 = a) = 0$.

זאת אומרת שערכו של Y_0 נותן אינפורמציה נוספת על האינפורמציה הנתונה בערכו של Y_1. אם כבר אנו שני צעדים רצופים במצב a אז ברור שבשרשרת המקורית אנו במצב 2, ואם אנו רק צעד אחד רצוף במצב a אז ברור שבשרשרת המקורית אנו במצב 1.

שאלה

למכונה יש שני רכיבים שכל אחד מהם תקין זמן המתפלג $G(0.5)$ באופן בלתי תלוי באחר. המכונה נמצאת במצב 1-פועלת כל עוד לפחות אחד מהרכיבים תקין. המכונה נמצאת במצב 0-לא פועלת, כאשר אף אחד מהרכיבים כבר לא תקין.

א. האם התהליך שמתאר את מספר הרכיבים התקינים הוא שרשרת מרקוב ?

ב. האם התהלך שמתאר את פעילות המכונה בזמנים השונים הוא שרשרת מרקוב ?

תשובות

א. כן. יש שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

ב. לא. בהתחלה היא מבוססת על שני רכיבים וההסתברות ששניהם יפלו עד השלב הבא היא 0.25 .
אחר-כך כלל לא בטוח שהיא מבוססת על שני רכיבים ולכן ההסתברות להגיע ממצב פועל למצב לא פועל היא גדולה יותר. לכן לא מתקיימת תכונת ההומוגניות בזמן.

הגדרות

$P_{i,j}$ היא ההסתברות להגיע למצב j תוך צעד אחד לאחר שנמצאים במצב i.

$P_{i,j}^{(n)}$ היא ההסתברות לעבור ב n צעדים ממצב i למצב j .

אינטואיטיבי לחשוב שהמטריצה $P^{(n)}$ זהה לחזקה ה-n-ית של מטריצת המעבר P .

זה אכן קורה.

הסתברויות מעבר מסדר גבוה מ-1

טענה

$P^{(n)} = P^n$

נוכיח באינדוקציה.

מובן ש $P^{(1)} = P$.

נניח שעבור כל $t \le n$ מתקיים $P^{(t)} = P^t$ ונראה שמתקיים גם $P^{(n+1)} = P^{n+1}$.

לפי הסתברות שלמה מתקיים $P_{i,j}^{(n+1)} = \sum_k P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(1)}$. (כדי להגיע ב $n+1$ צעדים ממצב i למצב j, צריך לעבור באיזשהו מצב בשלב n).
מתקיים $P^{(1)} = P$ ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $P^{(n)} = P^n$. לכן מתקיים $P_{i,j}^{(n+1)} = \sum_k P_{i,k}^n P_{k,j}$. באגף ימין יש הכפלה של מטריצות וכמובן שלכל מטריצה P מתקיים $P^n P = P^{n+1}$.
לכן מתקיים $P_{i,j}^{(n+1)} = P_{i,j}^{n+1}$.

<u>הגדרה:</u>
$f_{i,j}^{(n)}$ היא ההסתברות להגיע למצב j לראשונה ב n צעדים כאשר מתחילים במצב i.

$f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}$ - זאת היא ההסתברות להגיע אי פעם ממצב i למצב j.

<u>הגדרה:</u>
מצב i מקושר למצב j אם קיים מסלול באורך כלשהו ממצב i למצב j.

<u>הגדרה:</u>
מצבים i ו j הם מקושרים אם מכל אחד מהם יש מסלול לאחר שבינהם.

<u>הגדרה:</u>
מצב i הוא מצב ארגודי אם לגבי כל מצב j ש i מקושר אליו, i מקושר גם מ j.

<u>דוגמא:</u>
שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{matrix} 0.1 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

קבוצת המצבים $\{2,3,4\}$ הם מקושרים כל אחד לאחר ואין מהם גישה למצבים אחרים, לכן הם מצבים ארגודים.
ממצב 1 יש גישה למצבים שמהם אין גישה בחזרה, לכן הוא לא מצב ארגודי.

<u>טענה:</u>
אם i הוא ארגודי ו i מקושר ל j אז גם j מקושר ל i ומצב j הוא גם ארגודי.

<u>הוכחה:</u>
נתייחס למצבים שאליהם ניתן להגיע ממצב j. אם ממצב j ניתן להגיע למצב k אז גם ממצב i ניתן להגיע למצב k (דרך j), אך מצב i הוא ארגודי ולכן ממצב k יש מסלול למצב i, לכן ממצב k יש מסלול גם למצב j (דרך מצב i). לכן מצב j חייב להיות ארגודי.

<u>מסקנה:</u>
את המצבים הארגודים ניתן לחלק למחלקות שקילות.
אם i ארגודי שמקושר ל j אז הם באותה מחלקה וכמו-כן כל מצב שבאותה מחלקה עם אחד מהם הוא גם באותה מחלקה עם האחר.

<u>הגדרה:</u>
מחלקה בלתי פריקה של מצבים היא קבוצת מצבים שבה כל מצב מקושר לכל מצב אחר, ואין מסלולים מקבוצה זו אל מצבים שמחוץ לקבוצה.
<u>הערה:</u> מחלקה בלתי פריקה היא למעשה מחלקת שקילות של מצבים ארגודים.

הגדרה:

מצב i הוא מצב נשנה אם $f_{i,i}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)}=1$, זאת אומרת אם בודאות חוזרים ממנו אל עצמו.

הגדרה:

מצב חולף הוא מצב שאינו נשנה, זאת אומרת שחוזרים אליו בהסתברות נמוכה מ 1.

טענה:

אם מצב הוא נשנה אז כאשר מתחילים בו אז חוזרים אליו אינסוף פעמים בהסתברות 1.

נימוק:

לפי הגדרתו כמצב נשנה אז לאחר כל ביקור בו, יש ביקור נוסף בהסתברות 1.
המשלים של המאורע של אינסוף ביקורים הוא איחוד בין מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס.

טענה:

מצב שאינו ארגודי הוא חולף.

נימוק:

ממצב i שאינו ארגודי יש מסלול למצב j שממנו אין דרך חזרה למצב i. קיימת הסתברות חיובית שנעשה את רצף הצעדים ממצב i למצב j ואז לא נחזור יותר למצב i.

נראה שהטענה בכיוון ההפוך אינה נכונה.

דוגמא למצב ארגודי שהוא חולף:

נגדיר שרשרת מרקוב על מרחב מצבים שהם השלמים האי שליליים.

ממצב 0 הולכים בודאות למצב 1. עבור כל מצב i $i>0$ הולכים למצב 0 בסיכוי $\frac{1}{3^i}$ ואחרת הולכים למצב $i+1$. מכל מצב יש מסלול (אפילו ישיר) למצב 0 , לכן מצב 0 הוא מצב ארגודי. אבל ההסתברות לחזור למצב 0 לא גדולה מסכום ההסתברויות לחזור אליו מהמצבים האחרים שהוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}<1$.

טענה:

בשרשרת סופית מצב ארגודי הוא בהכרח מצב נשנה.
לטענה זאת נראה שתי הוכחות שונות בשלבים שונים של הקורס. אבל קודם לכן נעשה בה ובטענות האחרות שימוש לצורך מיון מצבים למחלקות אי פריקות של מצבים נשנים ולמצבים חולפים.

דוגמא:

מיינו את מצבי השרשרת בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר:

$$\begin{matrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{matrix}$$

קבוצת המצבים $\{4,5\}$ היא קבוצה בלתי פריקה של מצבים נשנים. המצב 3 הוא בפני עצמו קבוצה בלתי פריקה של מצב נשנה. המצבים 1 ו 2 הם חולפים. מצב 1 הוא מצב חולף למרות שאין ממנו מסלול ישיר (של צעד אחד) למצב שממנו אין דרך חזרה.

טענה:

יהיו i ו j מצבים בשרשרת מרקוב סופית בת M מצבים. אם קיים מסלול ממצב i למצב j בעל אורך כלשהו, אז קיים מסלול באורך של לא יותר מ M מ i ל j .

הוכחה:

נניח שיש מסלול באורך m. אם $m \le M$ אז קיים מסלול כנדרש. אם $m > M$ אז יש מצב r שמופיע במסלול יותר מפעם אחת. לכן ניתן לקצר את המסלול על-ידי קיצוץ חלק המסלול שבין מצב r לעצמו. עדיין נקבל מסלול שבו לכל מעבר יש הסתברות חיובית ממש. כך ניתן לקצר כל מסלול שבו האורך גדול מ M. כך לא יתכן שאורך המסלול המינימלי יהיה גדול מ M.

<u>הערה:</u>

אם i ו j הם בהכרח מצבים שונים אז קיום מסלול אפילו גורר קיום מסלול באורך לא יותר גדול מ $M-1$. אבל נסתפק בתוצאה הכללית שקיים מסלול באורך לא יותר מ M.

נסתמך על התוצאה הזאת כדי לתת את ההוכחה הראשונה לכך שכל מצב ארגודי בשרשרת סופית בת M מצבים הוא נשנה.

<u>הוכחה:</u>

מכיון שמצב i הוא מצב ארגודי אז עבור כל מצב j יש מסלול באורך לא יותר גדול מ M ממצב j למצב i.

עבור כל מצב j יש הסתברות של לפחות a_j להגיע למצב i תוך M (את a_j הוא אצלנו מכפלת ההסתברויות על המסלול שעל קיומו הצבענו). נגדיר $a = \min_j \{a_j\}$. המינימום של מספר סופי קבוע של מספרים חיובים ממש הוא מספר חיובי ממש. כדי להוכיח שמצב i הוא נשנה די להראות שההסתברות לא לחזור אליו מעצמו שואפת לאפס כאשר מספר הצעדים שואף לאינסוף. יש לנו סיכוי של לפחות a לחזור תוך M צעדים. אם לא נחזור תוך זמן זה, אז נהיה במצב אחר. עבור כל מצב אחר הסיכוי לחזור למצב יהיה שוב לפחות a. עבור כל k טבעי, ההסתברות לא לחזור למצב i תוך kM צעדים, לא תהיה גדולה מ $(1-a)^k$. מכיוון ש $a > 0$ אז הסתברות זאת תשאף לאפס כאשר $k \to \infty$.

<u>בעיות נוספות</u>

<u>שאלה</u>

למכונה שני רכיבים. לרכיב הראשון אורך חיים המתפלג $G(0.5)$ ולרכיב השני אורך חיים המתפלג $G(0.8)$. אורכי החיים של שני הרכיבים השונים הם בלתי תלויים. נגדיר תהליך סטוכסטי בעל קבוצת המצבים $\{0,1,2\}$ המייצגים את מספר הרכיבים התקינים בזמן נתון.

האם התהליך הזה הוא שרשרת מרקוב ?

<u>פתרון</u>

לא מתקיימת תכונת ההומוגניות בזמן.

נתחיל רק עם אינטואיציה ואחר-כך נראה חישובים.

כאשר המכונה די חדשה אז יש סבירות לא כל כל נמוכה שאם היא עובדת על רכיב אחד, אז זהו הרכיב החלש (שהוא בעל זמן חיים המתפלג $G(0.8)$). זה פחות סביר מאשר שהיא עובדת על הרכיב החזק, אבל עדיין בעל סבירות לא נמוכה. כאשר היא עובדת לאחר הרבה זמן על רכיב אחד אז הסבירות שזהו הרכיב החלש דועכת ולכן סיכוייה ליפול עד השלב הבא קטנים יותר (כפי הנראה היא מתבססת על הרכיב החזק).

ועכשיו לחישובים:

בהינתן שהיא עובדת על רכיב אחד ביחידת הזמן השניה, ההסתברות שזהו החלש היא:

$\frac{0.2 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8(1-0.5)}$ וההסתברות שזהו הרכיב החזק היא $\frac{0.8 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5}$.

ההסתברות השלמה שהיא תעבוד גם ביחידת הזמן שמייד אחר-כך היא:

$$\frac{0.2 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5} 0.2 + \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.5} 0.5$$

אם למשל לאחר 10 יחידות זמן היא עובדת בהתבסס על רכיב אחד אז ההסתברות שזהו הרכיב החלש היא $\frac{0.2^9(1-0.5^9)}{0.2^9(1-0.5^9)+0.5^9(1-0.2^9)}$ וההסתברות השלמה שהרכיב שעובד יעבוד גם בשלב הבא היא

$$\frac{0.2^9(1-0.5^9)}{0.2^9(1-0.5^9)+0.5^9(1-0.2^9)}0.2+\frac{0.5^9(1-0.2^9)}{0.2^9(1-0.5^9)+0.5^9(1-0.2^9)}0.5$$

<u>הערה</u>: כאשר הזמן שואף לאינסוף, אז לגבי מכונה שמתבססת על רכיב אחד, ההסתברות שהיא תעבוד עוד יחידת זמן אחת שואפת ל 0.5. הסיבה לכך היא שההסתברות המותנה שהיא עובדת בהתבסס על הרכיב החזק, שואפת ל 1.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על השריג הדו-מימדי.

נניח שבכל שלב הולכים צעד אחד ימינה, או צעד אחד שמאלה, או צעד אחד למעלה, בסיכוי $\frac{1}{3}$ כל אחד,

ואף פעם לא למטה. נניח שההילוך מתחיל בראשית.

יהי (X_n, Y_n) מיקום הנקודה בשלב ה-n. יהי Z_n מרחק הנקודה מהראשית בשלב ה-n.

כך למשל אם $X_n = 2$ ו $Y_n = 3$ אז $Z_n = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

האם הסדרה $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית ?

<u>פתרון</u>

זאת לא שרשרת מרקוב.

$$P\left(Z_4 = 0 \mid Z_0 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = \sqrt{2}, Z_3 = 1\right) = 0 \neq P\left(Z_4 = 0 \mid Z_0 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 1\right)$$

מהנקודה $(1,1)$ אין דרך חזרה לראשית. מצד שני אם יתכן שלא עזבנו את ציר ה-X אז יתכן שנחזור לראשית.

לכן ערכו של Z_3 לא נותן את כל האינפורמציה הרלוונטית לגבי התפלגות Z_4. המשתנים הקודמים מוסיפים מידע רלוונטי.

יכולנו גם להראות שאין הומוגניות בזמן:

$Z_n = 5$ אם נמצאים בנקודה $(5,0)$ וגם אם נמצאים בנקודה $(4,3)$. מהנקודה $(4,3)$ יש מעבר לנקודה $(4,4)$ שבה $Z_n = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$. מהנקודה $(5,0)$ אין מעבר בשלב אחד לנקודה בה $Z_n = \sqrt{32}$. אם $Z_5 = 5$ אז לא יתכן ש $Z_6 = \sqrt{32}$, אך אם $Z_7 = 5$ אז יתכן ש $Z_8 = \sqrt{32}$ כי יתכן שבשלב השביעי אנו ב $(4,3)$.

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ סדרות של משתנים

שלומי

נדון תחילה בסדרות של מאורעות. כל מאורע בסדרה יכול להתקיים או לא להתקיים.

שאלות למוטיבציה

מבצעים אינסוף הטלות בלתי תלויות של מטבעות. האם התוצאה 1 תתקבל אינסוף פעמים ?

א. אם בכל הטלה ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{3}$.

ב. אם עבור כל n ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{n}$ (במקרה זה כל מטבע מקבל תוצאה 1 בסיכוי שונה).

ג. אם עבור כל n ההסתברות לתוצאה 1 היא $\frac{1}{n^2}$ (במקרה זה כל מטבע מקבל תוצאה 1 בסיכוי שונה).

הגדרה

תהי נתונה סדרה של מאורעות A_i. אומרים שהמאורעות מתרחשים $i.o.$ אם מתרחשים אינסוף מאורעות (A_i $i.o.$ זה ראשי תיבות ל infinity often).

הערה שתובהר בהמשך

יש סדרות שלגביהן אפשר לקבוע מראש אם יתקיימו אינסוף מאורעות או לא. יש סדרות אחרות שלגביהן בהסתברות מסוימת שהיא בין 0 ל 1 זה מתרחש.

משפט (הלמה של בורל קנטלי)

תהי $(A_n \quad : \quad n \geq 1)$ סדרה אינסופית של מאורעות. אזי מתקיימות הטענות הבאות:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אזי $P(A_n \quad i.o.) = 0$.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ והמשפחה $\{A_1, A_2, \cdots\}$ ב"ת אזי $P(A_n \quad i.o.) = 1$.

הוכחה

א. $(A_n \quad i.o.) \subset \bigcup_{k \geq m} A_k$ לכל $m \geq 1$ ולכן: $P(A_n \quad i.o.) \leq P\left(\bigcup_{k \geq m} A_k\right) \leq \sum_{k \geq m} P(A_k)$. אך, $\lim_{m \to \infty} \sum_{k \geq M} P(A_k) = 0$ (שהרי $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$: זהו טור מתכנס) ולכן $P(A_n \quad i.o.) = 0$.

ב. נוכיח ש- $P(A_n \quad i.o.)^c = 0$; כלומר: $P\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0$. בשביל זה מספיק להראות ש- $P\left(\bigcap_{k \geq n} A_k^c\right) = 0$ לכל $n \geq 1$ (כי איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס הוא בעל הסתברות אפס). אך, לכל $x \in \Re$ מתקיים $1 - x \leq e^{-x}$ ולכן מאי-תלותם של המאורעות $A_n \quad n = 1,2,\cdots$ נקבל: $P\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{n+j}(1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{n+j} e^{-P(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k)\right)$ וכאשר $j \to \infty$ גם $\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k) \to \infty$ (שהרי $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$) ולכן $\exp\left(-\sum_{k=n}^{n+j} P(A_k)\right) \to 0$. מכאן:

$P\left(\bigcap_{k\ge n} A_k^c\right)=\lim_{j\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{n+j} A_k^c\right)=0$ לכל $n\ge 1$.

כעת משהוכחנו את שתי הטענות שבלמה, נוכל לענות על שאלות המוטיבציה ששאלנו בתחילה.

מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}=\infty$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ ונתון שבכל אחד מהמקרים המאורעות הם בלתי תלויים, אז בשני הסעיפים הראשונים בהכרח יתקיימו אינסוף מאורעות. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ אז במקרה השלישי בהסתברות 1 יתרחשו מספר סופי של מאורעות, זאת אפילו בלי הזדקקות לתנאי האי תלות.

<u>שאלה</u>
האם אפשר לוותר על תנאי האי תלות בחלק השני של הלמה ?
<u>תשובה</u> לא
נניח שמטילים מטבע הוגן בודד שעל בדיוק צד אחד שלו כתוב 1. נניח שכל אינסוף המאורעות הם זהים וכל אחד מהם שווה לאינדיקטור שהמטבע הראה 1. בסיכוי של חצי יתרחשו אינסוף מאורעות ובסיכוי של חצי לא יתרחש אף מאורע.

<u>שאלה</u>
תהי $\{X_n\}$ סדרה של משתנים $\exp(1)$. ב"ת.

האם יתרחשו אינסוף מאורעות $(X_n>c\log(n))$? מהו הגבול העליון של $\frac{X_n}{\log(n)}$?

<u>תשובה</u>
עבור משתנה $\exp(1)$ מתקיים עבור כל $a\ge 0$: $P(X\ge a)=e^{-a}$.
לכן כאן מתקיים עבור כל n : $P(X_n>c\log(n))=e^{-c\log(n)}=n^{-c}$.
עבור $c\le 1$ מתקיים $\sum n^{-c}=\infty$ ועבור $c>1$ מתקיים $\sum n^{-c}<\infty$.
לכן יתרחשו אינסוף מאורעות אם"ם $c\le 1$.
(תנאי האי תלות מאפשר שימוש גם בכיוון השני של הלמה)
עבור כל $\varepsilon>0$ לא יהיו אינסוף משתנים X_n שיקיימו $X_n\ge(1+\varepsilon)\log(n)$.
לכן עבור כל ε הגבול העליון לא יהיה גדול מ $1+\varepsilon$.
מצד שני יהיו אינסוף משתני X_n כך ש $X_n\ge\log(n)$. לכן הגבול העליון הוא 1.

<u>שאלה</u>
קוף מקליד מעתה ועד עולם באופן אקראי על מקלדת. האם הוא יקליד לפחות פעם אחת ברצף את התנך ?
<u>תשובה</u> כן
התנך הוא ארוך מאוד אך אורכו הוא איזשהו M סופי. כל תו נבחר מבין מספר סופי a של תוים. בכל רצף של M הקלדות, הסיכוי להקליד את התנך הוא $\frac{1}{a^M}$. זהו מספר קבוע. רצפים שיש בינהם חפיפה הם תלויים. אך נבחר אוסף אינסופי של רצפים זרים. באוסף זה הרצף ה- k יתחיל במקום $kM+1$ עבור כל k טבעי. כך לא יהיו חפיפות בין הרצפים השונים ותהיה אי תלות בין המאורעות של הצלחה ברצפים שונים. נקבל אוסף של מאורעות בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש הסתברות קבועה $\frac{1}{a^M}$.

לכן בהכרח יתרחשו אינסוף הקלדות של התנך.

שאלה

בשלב ה- n מוציאים כדור מכד שבו כדור לבן ו $n-1$ כדורים שחורים.
האם מתקיים שאינסוף פעמים נוציא כדור לבן ? האם לפחות 5 פעמים יהיה רצף של שני כדורים לבנים ?

תשובה

יהי A_n - המאורע של הוצאת כדור לבן בפעם ה- n , $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\sum P(A_n) = \sum \frac{1}{n} = \infty$, לכן אם מניחים שיש אי תלות בין המאורעות אז בהסתברות 1 יתרחשו ∞ הוצאות של כדורים לבנים.

יהי B_n - המאורע שבפעם ה- n וגם בפעם ה- $n+1$ נקבל כדור לבן. $P(B_n) = \frac{1}{n(n+1)}$

ו $\sum P(B_n) = \sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$. זה אומר לנו שלא יהיו אינסוף רצפים של שני כדורים לבנים. אך זה לא עונה לשאלה אם יהיו לפחות 5 רצפים. נתגבר על בעיה זו:
כמובן שיתכן שבהוצאה השניה יוצא כדור שחור. אם זה יתרחש אז הרצף הראשון לא יהיה של שני כדורים לבנים.
מתקיים $\sum_{n=2}^{\infty} P(B_n) < 1$ לכן לא ודאי שהחל מהרצף השני נקבל איזשהו רצף של שני כדורים לבנים. בסיכוי ששווה לפחות למכפלת ההסתברויות שהכדור הראשון שחור ובהמשך לא יהיה רצף של לבנים, נקבל שלא יהיה אף רצף של כדורים לבנים.

שאלה

בוחרים באקראי אחד משני כדים. באחד מהם יש שני כדורים לבנים ושלושה כדורים שחורים ובשני יש רק ארבעה כדורים שחורים. מהכד הנבחר מבצעים סדרה אינסופית של הוצאות עם החזרה של כדורים.
מהי ההסתברות שנוציא אינסוף כדורים לבנים ? איך זה מסתדר עם הלמה של בורל קנטלי ?

תשובה

אם יבחר הכד הראשון אז בודאות יהיו אינסוף כדורים לבנים (בדקו זאת לפי הלמה של בורל קנטלי).
אם יבחר הכד השני אז בודאות לא יהיה אף כדור לבן. לכן בסיכוי 0.5 יהיו אינסוף כדורים לבנים.
מתקיים שבכל הוצאה הסיכוי לכדור לבן הוא $\frac{1}{5} = 0.5 \cdot \frac{2}{5} + 0.5 \cdot 0$ ו $\sum \frac{1}{5} = \infty$, אך המאורעות הם תלויים ולכן התוצאה של הוצאה אחת מרמזת על התוצאה של הוצאה אחרת.

שאלה

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

יש לבדוק לפי הלמה של בורל קנטלי האם אינסוף פעמים נבקר במצב 1.
יש לבדוק האם עבר כל n טבעי יהיה לנו רצף של n ביקורים במצב 1.

תשובה

בכל שלב באופן בלתי תלוי בשלבים הקודמים, ההסתברות לבקר במצב 1 היא 0.5. $\sum 0.5 = \infty$ ולכן לפי הלמה נבקר אינסוף פעמים במצב 1.

בכל רצף של n זמנים עוקבים יהיה רצף של ביקורים במצב 1 בהסתברות $\frac{1}{2^n}$. שוב נבחר אוסף של אינסוף רצפים ללא כל חפיפה. הרצף ה- k יתחיל במקום ה- $kn+1$ עבור כל k טבעי. הודות לזרות, מה שקורה בכל רצף כזה הוא בלתי תלוי באחרים. מתקיים $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\infty$. לכן עבור כל n קבוע נקבל אינסוף רצפים באורך n בהסתברות 1. המאורע שיהיה קיים n שעבורו לא יהיה רצף מתאים הוא איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס ולכן ההסתברות שלו היא אפס. לכן בהסתברות 1 נקבל שעבור כל n טבעי יהיו אינסוף רצפים מתאימים.

<u>הילוך מקרי סימטרי על הישר</u>

בתהליך זה קבוצת המצבים היא של כל השלמים ובכל שלב הולכים ימינה צעד אחד ושמאלה צעד אחד בסיכוי שווה ובאופן ב"ת בשלבים האחרים.
כאן נראה בעזרת הלמה של בורל קנטלי שמצבי התהליך הזה הם נשנים. בהמשך הקורס, כאשר יעמדו לרשותנו כלים נוספים, נוכל לתת לטענה זו מספר הוכחות נוספות שיהיו פשוטות יותר.
נראה שבהסתברות 1 מבקרים אין סוף פעמים במצב שבו מתחילים. נניח בלי הגבלת הכלליות שהמצב ההתחלתי הוא מצב 0. המאורעות של ביקורים במצב 0 בזמנים שונים אינם מאורעות ב"ת. לכן הוכחה לנשנות של מצב 0 לא יכולה להתבסס על הלמה של בורל קנטלי ועל כך שסכום ההסתברויות לבקר במצב 0 בשלבים שונים מסתכם באין סוף. בכל זאת נבסס הוכחה על הלמה של בורל קנטלי.
נסתכל על אוסף נקודות זמן $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שיוגדרו באופן הבא: $b_{1=}1$ ולכל $2\le n<\infty$ יתקיים $b_n=b_{n-1}+{b_{n-1}}^2$. הרעיון הוא להראות שבהסתברות 1 באין סוף מנקודות זמן אלה נהיה משמאל לראשית או בראשית. באופן סימטרי לכך, נהיה גם באין סוף מנקודות זמן אלה ימינה לראשית או בראשית. אם אין סוף פעמים נמצאים משמאל לראשית ואין סוף פעמים נמצאים ימינה לראשית, אז חייבים לעבור בראשית אין סוף פעמים, וכך בהסתברות 1 מבקרים בראשית אין סוף פעמים. הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה ממש ולכן היא שואפת לאין סוף. בין נקודת הזמן b_{n-1} לנקודת הזמן b_n יש ${b_{n-1}}^2$ צעדים. אם בצעדים אלה נעשה b_{n-1} צעדים שמאלה יותר מאשר ימינה, אז לא נוכל להיות ימינה לראשית, וזאת בלי שום קשר למיקום שלנו לאחר b_{n-1} הצעדים הראשונים. על פי משפט הגבול המרכזי, ההסתברות לסטייה מהתוחלת בכל מספר שהוא בסדר גודל של שורש של מספר צעדים שואפת לגבול חיובי. לכן סכום ההסתברויות שבקטעים שונים תהיה סטייה כזאת הוא אין סוף. נגדיר סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: המאורע A_n יהיה שב ${b_{n-1}}^2$ הצעדים שבין b_{n-1} ל b_n נעשה לפחות b_{n-1} צעדים שמאלה יותר מאשר ימינה. לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות מבין $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.
השתמשנו במשפט הגבול המרכזי. לפי משפט הגבול המרכזי, אם נתונה סדרה של משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות ובעלי שונות סופית, אז עבור מספר גדול n של משתנים מהסדרה, ההסתברות שהממוצע שלהם קטן מקבוע a שווה בקירוב ל $\phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$, כאשר μ היא התוחלת של המשתנים, σ^2 היא השונות שלהם ו ϕ היא פונקצית ההסתברות המצטברת של משתנה נורמלי סטנדרטי שהיא חיובית בכל נקודה על הישר. בהילוך מקרי סימטרי, סדרת המשתנים הם של המהלכים בשלבים השונים. הם מקבלים את הערכים 1 ו -1 בסיכויים שווים, ולכן התוחלות שלהם שוות ל 0 והשונויות שלהם שוות ל 1. המאורע שסכום n משתנים קטן מ $-\sqrt{n}$ הוא המאורע שהממוצע שלהם קטן מ $-\frac{1}{\sqrt{n}}$. ההסתברות שהממוצע מקבל ערך קטן מ $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת ל $\phi(-1)$ כאשר $n\to\infty$.

<u>חוקי גבול</u>

יש משתנים שלהם יש תוחלת. אם יש למשתנה תוחלת היא יכולה להיות סופית או אינסופית.

לסדרה של משתנים יש סדרה של ממוצעים מצטברים עד כל נקודת זמן. עבור כל נקודת זמן יש ממוצע מצטבר עד אותה נקודה. החוק החלש של המספרים הגדולים והחוק החזק של המספרים הגדולים הם שתי תכונות שונות המייצגות צורות שונות של התכנסויות של סדרת ממוצעים מצטברים לסדרת תוחלות מצטברות. לגבי כל סדרת משתנים מקריים, כל אחד מהחוקים חל עליה או שהוא לא חל עליה.
נאפיין סוגים של סדרות של משתנים שעליהם חוק חל. כמו כן נדון בסדרות ספיציפיות.

<u>החוק החלש</u>

בחיי יום יום מבצעים מספר גדול של דגימות כדי לאמוד את הממוצע. התקוה היא שאם עוצרים לאחר הרבה נסיונות הממוצע יהיה קרוב לתוחלת (ניתן לדבר על תוחלת מסוימת אם המשתנים הם שווי תוחלות). הקריטריון הוא האם בנקודה בודדת הממוצע קרוב לתוחלת.

<u>ניסוח החוק החלש</u>

תהי $\{X_i\}_1^\infty$ סדרת משתנים שבה לגבי כל i למשתנה ה-i יש תוחלת μ_i. החוק החלש חל על הסדרה אם עבור כל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$.

<u>משפט</u>

על סדרת משתנים בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש אותה שונות סופית σ^2, חל החוק החלש של המספרים הגדולים.

<u>הוכחה</u>

נשתמש בחסמים של אי-שיוויון צ'בישב. עבור $\varepsilon > 0$ מתקיים עבור משתנה X בעל שונות סופית σ^2 ש $P(|x - E(x)| > \varepsilon) < \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

מתקיים $E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}$ ובהסתמך על האי תלות מתקיים $Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

כעת באמצעות אי שיוויון צ'בישב נוכל לקבל את החסם $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}\right| > \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

כאשר $n \to \infty$ סדרת חסמים זו שואפת לאפס.

כפי שנראה בדוגמאות שינתנו בהמשך, החוק החלש של המספרים הגדולים יכול לחול גם על סדרת משתנים שלגביה לא חלים תנאי משפט זה.

<u>החוק החזק של המספרים הגדולים</u>

אם חל על סדרת משתנים מקריים אז אם מסתכלים על נקודת זמן מתקדמת אז בהסתברות מספיק גבוהה באותה נקודה הממוצע קרוב מספיק לתוחלת. אבל זה לא אומר שהחל מאותה נקודה בהסתברות מספיק גבוהה נקבל תמיד קרבה לתוחלת. הדבר דומה במידה מסוימת להבדל בין התכנסות סדרה לבין התכנסות טור. יכול להיות שהאיבר

הכללי שואף לאפס אך זנב הטור לא שואף לאפס. יתכן מצב שבכל נקודה נהיה בהסתברות גדולה מספיק קרובים לתוחלת, אך בזמנים אקראים יהיו סטיות גדולות שאחר-כך יעלמו.

<u>ניסוח החוק החזק</u>

על סדרה של משתנים מקריים חל החוק החזק אם עבור כל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left|\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}-\frac{\sum_{i=1}^{k}\mu_i}{k}\right|>\varepsilon\right)=0$$

שימו לב שהמאורעות שעליהם אנו מבצעים איחוד הם מאורעות יורדים, כאלה שכל אחד מהם מכיל את הבאים אחריו. החוק אומר שעבור כל ε בהסתברות 1תהיה נקודת זמן שהחל ממנה לעולם לא סטייה תהיה של יותר מ ε. זאת אומרת שסטייה גדולה מ ε תהיה רק מספר סופי של פעמים.

<u>משפט</u>

על סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט רביעי סופי, חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

לשם פשטות רישום הביטויים נניח כאן שתוחלת המשתנים היא אפס. מכל משתנה בעל תוחלת אחרת אפשר לקבל משתנה בעל תוחלת אפס על-ידי הזזה. הזזה גם מזיזה את התוחלת באותו גודל.

ננסה להוכיח את הטענה באמצעות הלמה של בורל קנטלי תוך שימוש באי שיוויון צ'בישב.

עבור כל n קבוע נקבל חסם $\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2} < P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right|>\varepsilon\right)$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_1)}{n\varepsilon^2}=\infty$ ולכן לא ניתן באמצעות חסמים אלה לעשות שימוש בקריטריון של הלמה.

לכן נצטרך להשיג חסמים יותר טובים. הנחנו שלכל המשתנים שווי ההתפלגות יש מומנט רביעי סופי.

קיום מומנט מסוים סופי גורר גם את סופיות כל המומנטים הנמוכים יותר.

<u>הוכחה שהחוק החזק חל על סדרה זו</u>

באי שיוויון צ'בישב אנו למעשה מפעילים את אי שיוויון מרקוב על רבועי הסטיות מהתוחלת. רבועי הסטיות הן אי שליליות ותוחלתן היא השונות. כאן נפעיל את אי שיוויון מרקוב על החזקות הרבעיות של הסטיות מהתוחלת. החזקות הרבעיות הן גם אי שליליות והנחנו כאן שהן שוות לקבוע סופי.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right|>\varepsilon\right)=P\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^4>\varepsilon^4\right)=P\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^4>n^4\varepsilon^4\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^4=\sum_{i-1}^{n}E\left(X_i^4\right)+\sum_{i\neq j}\binom{4}{2}E\left(X_i^2X_j^2\right)+\sum_{i\neq j}\binom{4}{3}E\left(X_i^3X_j\right)+$$

$$+\sum_{i,j,k}\binom{4}{2}\binom{2}{1}E\left(X_i^2X_jX_k\right)+\sum_{i,j,k,l}4!E\left(X_iX_jX_kX_l\right)$$

מכיוון שהמשתנים הם בלתי תלויים אז מומנט של מכפלה שווה למכפלת המומנטים. מכיוון שהנחנו שהתוחלת היא אפס אז כל מכפלה של מומנטים שבה מופיע גם מומנט ראשון של משתנה שווה לאפס.
כמו-כן מכיוון שהמשתנים הם שווי התפלגות אז המומנטים של משתנים שונים הם שווים.

נקבל חסם $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = nA + \binom{4}{2}\binom{n}{2}B^2 < nA + 6n^2B^2$. כאשר A ו B הם המומנטים הרביעי והשני של המשתנים.

כעת נפעיל את אי שיוויון מרקוב $P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 > n^4\varepsilon^4\right) < \frac{nA + 6n^2B^2}{n^4\varepsilon^4}$. וזה מתנהג כמו $\frac{1}{n^2}$.

מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$. לכן בהסתברות 1 רק מספר סופי של פעמים הממוצע יסטה מהתוחלת ביותר מ ε. כך עבור כל ε. לכן על הסדרה חל החוק החזק של המספרים הגדולים.

נתן דוגמא שבה החוק החזק חל על סדרה למרות שהמשתנים הם תלויים.
יהי $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = 0.5$. נניח שאם $(X_1 = 0)$ אז עבור כל $i \geq 2$ מתקיים $P(X_i = 0) = 1$ ואם $(X_1 = 1)$ אז עבור כל $i \geq 2$ מתקיים $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5$ באופן בלתי תלוי ביניהם בהינתן ש $(X_1 = 1)$.
המשתנים הם תלויים כי למשל עבור כל $i \geq 2$: $P(X_i = -1 \mid X_1 = 1) > 0 = P(X_i = -1 \mid X_1 = 0)$
עבור כל $i \geq 2$: $E(X_i) = 0.5 \cdot 0 + 0.5(0.5 \cdot (-1) + 0.5 \cdot 1) = 0$. רק למשתנה X_1 יש תוחלת ששונה מ 0 (שווה 0.5). לכן סדרת התוחלות מצטברות של המשתנים שואפת ל 0.
אם $(X_1 = 0)$ אז כל המשתנים מקבלים ערך 0 ולכן סדרת הממוצעים היא של אפסים והיא שואפת לסדרת התוחלות.
בהינתן ש $(X_1 = 1)$ אז הסדרה של המשתנים הבאים היא סדרה בלתי תלויה של משתנים בעלי מומנט רביעי סופי $0.5 \cdot (-1)^4 + 0.5 \cdot 1^4 = 1$, לכן על סדרה זו חל החוק החזק וסדרת הממוצעים שלה שואפת ל 0 שהיא התוחלת של המשתנים. לכן סדרת הממוצעים של הסדרה כולה כולל X_1 שואפת לאפס שהיא התוחלת (ההשפעה של משתנה בודד נעשית זניחה).
לכן בכל מקרה סדרת הממוצעים שואפת לאפס והחוק החזק חל על הסדרה למרות שהמשתנים תלויים.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{-1,0,+1\}$ ומטריצת מעבר $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

נניח ש $X_0 = 0$, זאת אומרת שמתחילים במצב 0.
האם על סדרת המשתנים $X_0, X_1, X_2, \cdots$ חל החוק החזק של המספרים הגדולים ?

<u>תשובה</u>
לא. וגם לא חל על הסדרה החוק החלש של המספרים הגדולים.
נימוק: אם מתחילים במצב 0 אז בסיכוי 0.5 מגיעים למצב -1 ובסיכוי 0.5 מגיעים למצב 1.

בזה שמבניהם שמגיעים אליו נשארים תמיד. מראש התוחלת של כל X_i היא אפס. אבל סדרת הממוצעים לא שואפת ל 0. היא מקבלת בסיכוי 0.5 את הערך -1 ובסיכוי 0.5 את הערך 1.

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הרצאה 3</u>

שלומי

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב על קבוצת המצבים שהם כל השלמים. בכל שלב בהסתברות 0.5 הולכים ימינה 3 צעדים ובסיכוי 0.5 הולכים שמאלה צעד אחד.
בהסתמך על החוק החזק של המספרים הגדולים, קבעו אם מצב 0 הוא נשנה.

<u>תשובה</u>

יהי X_i הסטייה בשלב ה-i. מכיון שהמשתנים X_i הם משתנים חסומים אז יש להם מומנט רביעי חסום ולכן על סדרת משתנים בלתי תלויים זאת חל החוק החזק של המספרים הגדולים. התוחלת של כל אחד מהמשתנים האלה היא $0.5\cdot 3+0.5\cdot(-1)=1$. מכיון שהחוק החזק של המספרים הגדולים חל על הסדרה אז מתקיים שהממוצע המצטבר של המשתנים יסטה מ 1 בלמשל יותר מ 0.5 רק מספר סופי של פעמים. לכן הממוצע ישווה לאפס רק מספר סופי של פעמים. לכן כשמתחילים במצב 0 נבקר במצב 0 רק מספר סופי של פעמים. לכן הוא מצב חולף.

<u>שאלה</u>

האם ניתן לקבוע אם מצב 0 הוא חולף, רק בהסתמך על החוק החלש של המספרים הגדולים ?

<u>תשובה</u>

לא.
החוק החלש חל על הסדרה, הוא אומר רק שכאשר הזמן שואף לאינסוף, תשאף ההסתברות שהממוצע יהיה רחוק מ 1 בלמשל יותר מ 0.5 לאפס. זאת אומרת שההסתברות שהסכום המצטבר יהיה 0 תשאף לאפס. אבל זה לא אומר שלא נהיה במצב 0 מספר אינסופי של פעמים.

<u>שאלה</u>

יהיו $X_1,X_2,...$ סדרת משתנים. מתקיים $P(X_1=0)=1$, עבור $i\geq 2$ התפלגות X_i נקבעת על-פי הערכים שקבלו $X_1,X_2,...,X_{i-1}$. מתקיים $X_i=-\left(\sum_{k=1}^{i-1}X_k\right)+Y_i$ כאשר המשתנים Y_i הם בלתי תלויים ומקיימים $P(Y_i=0)=1-\frac{2}{i}$, $P(Y_i=i)=P(Y_i=-i)=\frac{1}{i}$

<u>א</u>. הראו שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה.
<u>ב</u>. הראו שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה.

<u>פתרון</u>

<u>א</u>. בכדי שעל הסדרה יחול החוק החזק, צריכה סדרת הממוצעים המצטברים לשאוף לסדרת התוחלות המצטברות, זאת בהסתברות 1. כאן סדרת הסכומים המצטברים $\{S_i\}$ שווה למעשה לסדרה $\{Y_i\}$.

לכל i , Y_i הוא בעל תוחלת אפס לכן אילו החוק החזק היה חל על הסדרה היתה צריכה הסדרה $\left\{\frac{Y_i}{i}\right\}$ לשאוף לאפס בהסתברות 1. המאורעות $A_i=(Y_i=i)$ הם בלתי תלויים ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$, לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1, אין סוף פעמים $\left(\frac{S_i}{i}=1\right)$ לכן אין התכנסות של הסדרה $\left\{\frac{S_i}{i}\right\}$.

ב. כאמור $E\left(\frac{S_i}{i}\right)=E\left(\frac{Y_i}{i}\right)=0$. מתקיים $P\left(\frac{S_i}{i}\neq 0\right)=\frac{2}{i}$ אך $\lim_{i\to\infty}\left(\frac{2}{i}\right)=0$, לכן בודאי עבור כל $\varepsilon>0$, $\lim_{i\to\infty} P\left(\left|\frac{S_i}{i}-E\left(\frac{S_i}{i}\right)\right|>\varepsilon\right)=0$.

ראינו שבשרשרת סופית כל מצב ארגודי הוא נשנה. ראינו שבשרשרת אינסופית לא כל מצב ארגודי הוא נשנה. נתן כאן קריטריון לנשנות שמתאים לכל שרשרת ולא רק לשרשרות סופיות.

משפט

מצב i בשרשרת מרקוב הוא נשנה אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^{(n)}=\infty$.

כיוון אחד אפשר לקבל מהלמה של בורל קנטלי: יהי A_i המאורע שאם מתחילים בשלב 0 במצב i אז נמצאים שוב במצב i לאחר n שלבים. מתקיים $P(A_i)=P_{i,i}^{(n)}$. אם $\sum P(A_i)=\sum P_{i,i}^{(n)}<\infty$ אז בהכרח נקבל מספר סופי של ביקורים במצב i . את הכיוון השני אי אפשר לקבל באופן פשוט מהלמה כי יתכן שהמאורעות תלויים.
נוכיח את הכיוון השני:
נניח שמצב i הוא חולף אז לאחר כל ביקור בו יש הסתברות a , $0\le a<1$ שנחזור אליו באיזשהו שלב אחר-כך. מספר הביקורים במצב מתפלג $G(1-a)$ ולכן הוא בעל תוחלת סופית. אך $\sum P_{i,i}^{(n)}$ זה תוחלת מספר הביקורים לאחר שהתחלנו בו (כסכום אינדיקטורים). לכן תוחלת מספר הביקורים בו היא ∞ וקבלנו סתירה להיותו של i מצב חולף.

משפט

נשנות היא תכונה מחלקתית.
הראנו שאם מצבים מתקשרים הדדית אז ארגודיות של אחד גוררת את הארגודיות של האחר.
נראה שגם נשנות היא תכונה מחלקתית.
נניח שמצבים i ו j מתקשרים ומצב i הוא נשנה. קיים מסלול באורך k מסוים קבוע (מבין רבים) שמוביל ממצב i למצב j וקיים מסלול באורך t מסוים שמוביל ממצב j למצב i. מתקיים $P_{j,j}^{(t+n+k)}\ge P_{j,i}^{(t)}P_{i,i}^{(n)}P_{i,j}^{(k)}$ (במעבר דרך מצב i , אולי יש מעברים נוספים, אבל זה נותן חסם).
הגדלים $P_{j,i}^{(t)}$ ו $P_{i,j}^{(k)}$ הם גדלים קבועים חיובים. לכן

$$\sum_n P_{j,j}^{(t+n+k)}\ge P_{j,i}^{(t)}P_{i,j}^{(k)}\sum_{n=1}^{\infty}P_{i,i}^{(n)}=\infty$$

לכן גם מצב j הוא נשנה.

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב על השלמים שבה בכל שלב הולכים ימינה שלושה צעדים בסיכוי חצי והולכים שמאלה צעד אחד בסיכוי חצי.
האם מצב 8 הוא נשנה ?

תשובה

הוא לא נשנה. הוא חולף.
ראינו שעל-פי החוק החזק מצב 0 הוא חולף. מכיון שנשנות וחולפות הן תכונות מחלקתיות, אז מצב 8 שבאותה מחלקה כמו מצב 0 הוא גם חולף.

יכולנו להגיע למסקנה זו גם משיקולי סימטריה. אם הילוך שמתחיל במצב 0 הוא חולף אז גם הילוך שמתחיל במצב 8 הוא חולף (כאן בגלל הסימטריה בהסתברויות, ההסתברות לחזור למצב 8 מעצמו לאחר מספר מסוים של צעדים שווה להסתברות לחזור למצב 0 מעצמו תוך אותו מספר צעדים).

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב על השלמים האי שליליים. נניח שעבר כל מצב $i \ge 1$ מתקיים $P_{i,0} = 1$ ועבור כל $i \ge 1$ מתקיים $P_{0,i} = f(i) > 0$.

האם המצבים השונים הם נשנים או חולפים ?

<u>תשובה</u>

למצב 0 תמיד חייבים לחזור תוך שני צעדים (כי מכל מצב אחר מייד חוזרים אליו). לכן מצב 0 הוא נשנה.
השרשרת היא בלתי פריקה: מכל מצב יש מסלול למצב 0 (אפילו בצעד אחד) וממצב 0 יש מסלול לכל מצב אחר (אפילו בצעד אחד). מכיון שמצב 0 הוא נשנה ומכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים הם נשנים.

<u>מחזוריות</u>

יהי i מצב ארגודי בשרשרת מרקוב.
נסתכל על קבוצת הטבעיים $\{n_k\}$ המקיימים $P_{i,i}^{(n_k)} > 0$ (n_k שיך לקבוצה זו אם ניתן לחזור ממצב i לעצמו לאחר n_k צעדים).
לקבוצה זו של טבעיים יש מחלק משותף מכסימלי.

<u>הגדרה</u>

המחזור d_i של מצב i הוא המחלק המשותף המכסימלי של הטבעיים שבקבוצה זו.

נשים לב שאם $P_{i,i}^{(k)} > 0$ ו $P_{i,i}^{(t)} > 0$ אז גם $P_{i,i}^{(k+t)} > 0$ (את הרעיון של ההסבר לזה כבר ראינו בהוכחה לכך שנשנות היא תכונה מחלקתית).
לכן קבוצת הטבעיים $\{n_k\}$ היא סגורה תחת פעולת חיבור. לקבוצה המקיימת את התכונה הזאת קוראים חבורה למחצה. כל סכום של שני איברים מהקבוצה הוא גם בקבוצה.

<u>טענה</u>

עבור מצב i בעל מחזור d_i, ניתן לחזור אליו מעצמו רק בזמנים שהם כפולות שלמות של d_i.

<u>הסבר</u>

מספר הצעדים בין כל שני ביקורים עוקבים במצב i הוא כפולה של d_i. הזמן עד ביקור מסוים במצב i הוא סכום של זמנים שבין ביקורים עוקבים. לכן, גם הוא מהווה כפולה של d_i.

<u>טענה</u>

עבור מצב i בעל מחזור d_i, קיים N סופי, כך שלכל nd_i (מכפלה של d_i בשלם), כך ש $nd_i > N$, מתקיים $P_{i,i}^{nd_i} > 0$.

<u>הסבר</u>

צריך להראות שקיים N סופי כך שלאחריו עבור כל כפולה של d_i , קיים מסלול ממצב i לעצמו באורך זה.
למעשה צריך להראות שעבור כל כפולה כזאת, קיים סכום של טבעיים מהקבוצה $\{n_k\}$ שמסתכם באותה כפולה.
זה שקול לכך שקיימת קומבינציה של טבעיים מהקבוצה $\{n_k\}$ עם מקדמים חיובים שמסתכמת בכפולה כזאת.

מכיון שהמחזור של מצב i הוא d_i , אז לפי הנכונות של האלגוריתם של אוקלידס, קיימת קומבינציה של המספרים $\{n_k\}$ שמסתכמת ב d_i. בקומבינציה זו יכולים להופיע גם מקדמים שליליים.
נסתכל גם על קומבינציה של המספרים $\{n_k\}$ שבה כל אחד מהמקדמים שווה לערך המוחלט של המקדם של אותו טבעי בקומבינציה שנותנת את הסכום d_i. קומבינציה זו נותנת איזשהו סכום שלם M.
נסתכל גם על קומבינציה שבה עבור כל טבעי מהקבוצה $\{n_k\}$, המקדם שלו שווה לסכום מקדמיו בקומבינציה שיוצרת את d_i ומקדמו בקומבינציה שיוצרת את הסכום M. קומבינציה זו יוצרת את הסכום $M+d_i$. נשים לב לכך שכל המקדמים שבקומבינציה זו הם אי שליליים. כך ניתן ליצור בעזרת מקדמים אי שליליים בלבד את שני הסכומים M וגם $M+d_i$.
כעת נראה שבאמצעות קומבינציות עם מקדמים אי שליליים של M ו $M+d_i$, ניתן ליצור את כל הכפלות של d_i החל מ M^2 (הערה: אנו לא מחפשים את המקום המינימלי שהחל ממנו ניתן ליצור את כל הכפולות, די לנו להראות שקיים מקום כזה).
על-ידי מכפלה של M פעמים הגודל M, ניתן ליצור את הגודל M^2. כעת ניתן בכל שלב להגדיל את הסכום ב d_i על-ידי החלפת אחד הגורמים שבגודל M בגורם שבגודל $M+d_i$. כך ניתן ליצור את כל הכפולות של d_i שבין M^2 ל $M(M+d_i)$. את הגודל $M(M+d_i)$ ניתן ליצור גם על-ידי סכום של $M+d_i$ גורמי M.
כעת שוב ניתן להגדיל בכל שלב את הסכום ב d_i על-ידי החלפת אחד הגורמים שבגודל M בגורם שבגודל $M+d_i$. כך ניתן ליצור את כל הכפולות של d_i שבין $M(M+d_i)$ ל $M(M+2d_i)$. כך ניתן להמשיך וליצור את כל הכפולות של d_i החל מ M^2.

<u>טענה</u>
לכל המצבים שבאותה מחלקה יש את אותו מחזור, זאת אומרת שגם מחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית.
<u>הסבר</u>
נניח שלמצב i שבמחלקה יש מחזור d_i ולמצב j שבאותה מחלקה יש מחזור d_j.
נראה ש $d_j \le d_i$:
קיים m סופי כך ש $P_{i,i}^{(m)} > 0$ וגם $P_{i,i}^{(m+d_i)} > 0$. מכיון שהמצבים i ו j הם מקושרים אז קיים t סופי כך ש $P_{j,i}^{(t)} > 0$ וקיים k סופי כך ש $P_{i,j}^{(k)} > 0$. לכן מתקיים $P_{j,j}^{(t+m+k)} \ge P_{j,i}^{(t)} P_{i,i}^{(m)} P_{i,j}^{(k)} > 0$ וגם $P_{j,j}^{(t+m+d_i+k)} \ge P_{j,i}^{(t)} P_{i,i}^{(m+d_i)} P_{i,j}^{(k)} > 0$. לכן ניתן לחזור ממצב j לעצמו לאחר $t+k+m$ צעדים וגם לאחר $t+k+m+d_i$. לכן d_j מחלק את ההפרש שבינהם שהוא d_i ולכן $d_j \le d_i$. באופן דומה נקבל גם $d_i \le d_j$ ולכן $d_i = d_j$.

<u>דוגמא</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

למצב הראשון ניתן לחזור בשלושה צעדים וגם בחמישה צעדים, לכן המחזור שלו הוא 1 (מצב לא מחזורי). זאת למרות שלא ניתן לחזור אליו בצעד אחד.

<u>הערה</u> (חשיבותה תתברר בהמשך הקורס)
אם מצב הוא מחזורי אז לא ניתן לצפות שההסתברות הגבולית להיות בו בשלב מסוים תשאף לגבול. למשל אם מטריצת המעבר של שרשרת בת שני מצבים היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז בצעדים הזוגיים נהיה במצב בו התחלנו ובצעדים האי זוגיים במצב האחר.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב על השלמים האי שליליים. עבור כל $i \ge 9$ מתקיים $P_{0,i} = 0.5^{i-8}$ ו $P_{i,i-1} = 1$ עבור $i \ge 1$.

מהו המחזור של מצב 7 ?

<u>תשובה</u>

אם עוברים ממצב 0 ישירות למצב 9, אז חוזרים למצב 0 ב 10 צעדים. אם עוברים ממצב 0 ישירות למצב 10, אז חוזרים למצב 0 ב 11 צעדים. המחזור של מצב 0 צריך להיות לא גדול מהמחלק המשותף המכסימלי של 10 ו 11 שהוא 1. לכן מצב 0 הוא לא מחזורי. מצבים 0 ו 7 הם מקושרים וכך גם מצב 7 הוא לא מחזורי (המחזור שלו הוא 1).

<u>שאלה</u>

מהו המחזור של מצב 8 בהילוך מקרי על הישר ?

<u>תשובה</u>

אם מתחילים בראשית אז כדי להיות בראשית לאחר מספר מסוים של צעדים, צריך שמספר הצעדים ימינה ישווה למספר הצעדים שמאלה. לכן ניתן להיות בראשית רק בשלבים זוגיים. לכן המחזור של הראשית הוא כפולה של 2.

מכיון שניתן לחזור לראשית בשני צעדים, אז המחזור אינו יותר מ 2.

משני הטיעונים האלה נקבל שהמחזור של הראשית הוא בדיוק 2.

מכיון שמצבים 0 ו 8 הם מקושרים, אז גם למצב 8 יש מחזור 2.

<u>הערה</u>

במקרה זה יכולנו גם להראות ישירות שהמחזור של מצב 8 הוא 2. יכולנו לעשות זאת בהסתמך על טיפול בזמנים שבהם ניתן להגיע ממצב 8 לעצמו.

<u>שאלה</u>

יהי i - מצב בשרשרת מרקוב בלתי פריקה.

יהי a - המחלק המשותף המכסימלי של כל המספרים n , המקיימים $P_{i,i}^{(n)} > 0$.

יהי b - המחלק המשותף המכסימלי של כל המספרים n , המקיימים $f_{i,i}^{(n)} > 0$.

<u>א</u>. תנו נימוק מילולי קצר לכך שתמיד $a \ge b$. (<u>רמז</u>: קבוצה אחת מכילה את האחרת)

<u>ב</u>. הראו שאם מתחילים במצב i אז ניתן לבקר בו רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה שלמה של b .

<u>ג</u>. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $a = 1$ אז גם $b = 1$.

<u>ד</u>. הסיקו שניתן לאפיין אי מחזוריות בשני אופנים.

<u>ה</u>. הראו גם ש $b = a$.

<u>תשובה</u>

<u>א</u>. קבוצת המספרים $\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\}$ מוכלת בקבוצת המספרים $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$

(אם ניתן להגיע לראשונה לאחר מספר צעדים מסוים אז כמובן ניתן גם להגיע לאחר מספר צעדים זה, כי הגעה ראשונה היא מקרה פרטי של הגעה). כל מחלק משותף של הקבוצה $\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\}$

הוא גם מחלק משותף של קבוצה מצומצמת יותר של מספרים. לכן המחלק המשותף המכסימלי של הקבוצה $\left\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\right\}$ הוא גם מחלק משותף של הקבוצה $\left\{n \mid P_{i,i}^{(n)} > 0\right\}$. המחלק המשותף המכסימלי בקבוצה $\left\{n \mid f_{i,i}^{(n)} > 0\right\}$ שווה לפחות לו (מכיון שהוא אחד המחלקים המשותפים).

<u>ב</u>. בין כל שני ביקורים עוקבים במצב עובר זמן שהוא כפולה שלמה של b (כל ביקור הוא הראשון אחרי הביקור הקודם). לכן הזמן עד כל ביקור הוא כפולה שלמה של b.

<u>ג</u>. אם המחזור הוא 1 אז קיים n , כך שניתן לבקר במצב לאחר n שלבים וגם לאחר $n+1$ שלבים. לפי הסעיף הקודם n וגם $n+1$ הם כפולה שלמה של b, לכן $b=1$.

<u>ד</u>. הראנו שתמיד $b \ge a$ וגם הראנו שאם $a=1$ אז גם $b=1$. לכן התנאים ש $a=1$ וש $b=1$ הם שקולים. לכן שניהם מאפינים של אי מחזוריות.

<u>ה</u>. הנימוק דומה לנימוק של סעיף ג'. קיים n כך ש $P_{i,i}^{(n)} > 0$ וגם $P_{i,i}^{(n+a)} > 0$. בין כל ביקור עד לביקור הבא במצב i יש חזרה ראשונה למצב. לכן n הוא כפולה של b וגם $n+a$ הוא כפולה של b. לכן ההפרש ביניהם הוא גם כפולה של b. לכן a הוא כפולה של b. לכן נקבל ש $a \ge b$. ביחד עם התוצאה של סעיף א' נקבל ש $a=b$.

נראה <u>שימוש</u> פשוט ביותר במסקנה מהשאלה הזאת.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מהו המחזור של מצבי השרשרת ?

<u>תשובה</u>

ניתן לחזור לראשונה למצב רק בבדיוק 3 צעדים. לכן המחזור של כל מצב הוא 3.

<u>שאלה</u>

נתונות שתי מטריצות מעבר P,Q של שרשרות מרקוב בלתי פריקות ולא מחזוריות בעלות אותו מספר מצבים.

האם גם המטריצה $\frac{1}{2}(P+Q)$ היא מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב בלתי פריקה ולא מחזורית ?

<u>תשובה</u>

היא בהכרח בלתי פריקה ולא מחזורית.

נסתכל על אחת מהשרשרות המקוריות. היא בלתי פריקה כי ניתן יש מסלול מכל מצב לכל מצב. היא לא מחזורית וזה אומר שלגבי כל מצב, המחלק המשותף המכסימלי של אורכי המסלולים שבהם ניתן לחזור למצב מעצמו, הוא 1. בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$, כל איבר i,j הוא חיובי, אם האיבר ה i,j הוא חיובי באחת המטריצות המקוריות. לכן בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$ לגבי כל מצב, כל המסלולים שהיו אפשריים ממנו ואליו בשרשרות המקוריות, הן אפשריות גם בה.

<u>סוגיה שקשורה לנושא של מרקוביות</u>.

בחצר יש בן אחד ששמו נחום ושתי בנות ששמותיהן ליאת ושירי. ברשותם יש גם כדור בודד. בכל שלב שהכדור נמצא בידי נחום, הוא מחזיק את הכדור אצלו גם בשלב הבא בסיכוי חצי ומעביר אותו לידי כל אחת מהבנות בסיכוי רבע. בכל שלב שהכדור נמצא בידי ליאת היא מעבירה אותו לידי נחום בסיכוי 0.8 , משאירה אותו אצלה בסיכוי

0.1 ומעבירה אותו לשירי בסיכוי 0.1 . בכל שלב שבו הכדור נמצא בידי שירי היא מעבירה אותו לידי נחום בסיכוי 0.2 , משאירה אותו אצלה בסיכוי 0.4 ומעבירה אותו לליאת בסיכוי 0.4 . נניח שבתחילה הכדור נמצא בידי נחום. נסתכל על תהליך בעל שני מצבים. 1- הכדור נמצא בידי בן, 2- הכדור נמצא בידי אחת הבנות.
נשים לב שממצב 1 עוברים למצב 1 בסיכוי 0.5 . כמו כן נשים לב שאם הכדור נמצא בידי כל אחד מהשלושה, אז בשלב הבא הוא יהיה בידי ליאת בסיכוי שווה לסיכוי שהוא יהיה בידי שירי. לכן, גם ממצב 2 עוברים למצב 1 בסיכוי $0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.5$. לכן לתהליך יש מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

אך נשים לב שאילו את מצב 2, היינו מפרקים לשני תתי מצבים של כדור אצל ליאת וכדור אצל שירי, אז הסתברויות המעברים למצב של "הכדור אצל בן", היו משתנות בין שני תתי המצבים. אך ראינו שהתהליך המקורי הוא מרקובי.
מסוגיה זו נוכל ללמוד שאין לשלול מרקוביות בגלל תלות בתהליך אחר.

<u>שאלה נוספת על החוק החלש ועל החוק החזק</u>

יהיו $X_1, X_2, \cdots$ סדרת משתנים בלתי תלויים שלגביהם מתקיים :
אם $i = k^k$ עבור איזשהו k טבעי אז :

$$P[X_i = i] = P\ [X_i = -i] = \frac{1}{2k} \quad , \quad P[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{k}$$

ועבור i שלא מקיים את הדרישה הזאת $P[X_i = 0] = 1$.

<u>א</u>. הראה שהחוק החזק של המספרים הגדולים אינו חל על הסדרה .

<u>ב</u>. הראה שהחוק החלש של המספרים הגדולים חל על הסדרה .

<u>פתרון</u>

<u>א</u>. מכיוון ש $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ והמשתנים X_i בלתי תלויים אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 אינסוף פעמים יתקבל $\left|X_{k^k}\right| = k^k$ כך שאינסוף פעמים יתקבל $\left|\frac{S_{k^k}}{k^k} - \frac{S_{k^k-1}}{k^k-1}\right| > 0.5$, לכן סדרת הממוצעים תצא מסביבה ברדיוס 0.25 של הראשית אינסוף פעמים ואין התכנסות של סדרת הממוצעים .

<u>ב</u>. נסתכל על נקודת זמן i : $k^k \le i < (k+1)^{k+1}$. בנקודה כזאת המשתנה האחרון לפניה שיכול היה לקבל ערך שונה מאפס הוא X_{k^k} . מתקיים עבור כל $\varepsilon > 0$ $P\left(\left|\frac{X_{k^k}}{i}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{k}$ לכן :

$$\lim_{k \to \infty} P\left(\left|\frac{X_{k^k}}{i}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \quad (1) .$$

מתקיים $\sum_{n<k} n^n < k^{k-1}$ לכן $\lim_{k \to \infty} \frac{\sum_{n<k} \left|X_{n^n}\right|}{i} = 0 \quad (2)$.

מ (1) ומ (2) נקבל $\lim_{k \to \infty} P\left(\left|\frac{\sum_{n=1}^{k} X_{n^n}}{i}\right| > \varepsilon\right) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: די היה אם במקום (2) היינו מראים ש $\lim_{k\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{n<k} X_{n^n}}{i}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$, אך הראנו יותר מזה .

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ המשך נשנות</u>

שלומי

<u>הילוכים מקריים</u>

<u>דוגמא</u> (הילוך מקרי על הישר)
הילוך מקרי על הישר שבו בכל שלב הולכים ימינה בסיכוי p ושמאלה בסיכוי $q=1-p$.
ניתן לחזור ממצב לעצמו רק לאחר מספר זוגי של צעדים, לאחר כל מספר זוגי של צעדים ניתן לחזור מהמצב לעצמו. לכן המחזור של כל מצב הוא 2.
מכיון שראינו שנשנות היא תכונה מחלקתית אז, כדי לראות אם המצבים הם נשנים, די לבדוק אם מצב 0 הוא נשנה.

עבור כל n מתקיים $P_{0,0}^{(2n+1)}=0$. לכן צריך לבדוק אם $\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,0}^{(2n)} \overset{?}{=} \infty$.

מתקיים $P_{0,0}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n q^n=\frac{(2n)!}{n!n!}p^n q^n$. נשתמש בנוסחת סטרלינג כדי לקרב את הביטויים האלה:

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad , \quad (2n)! \sim \sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} .$$

לכן $P_{0,0}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n(pq)^n$.

עבור $p\neq 0.5$ מתקיים $pq<\frac{1}{4}$ והטור $\sum\frac{1}{\sqrt{\pi n}}4^n(pq)^n$ מתכנס ומצבי השרשרת הבלתי פריקה הם חולפים.

עבור $p=0.5$ הטור מתנהג כמו $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$. הוא מתבדר ולכן מצב 0 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

<u>הערה</u>: אפשר לראות גם לפי החוק החזק של המספרים הגדולים שעבור $p\neq q$ מצב 0 הוא חולף.
יש התכנסות של סדרת הממוצעים המצטברים של המהלכים לגודל $q\cdot(-1)+p\cdot 1\neq 0$ ולכן רק מספר סופי של פעמים נבקר במצב 0.
ברמה האינטואיטיבית, יש סחף לאחד הכיוונים. אם $p>0.5$ אז יש סחף לימין ואם $p<0.5$ יש סחף לשמאל.

נראה גם בדרך נוספת שהשרשרת היא נשנית כאשר $p=0.5$:
לאחר $2n$ צעדים ניתן להגיע ממצב 0 למצבים הזוגיים שהם בין $-2n$ ל $+2n$. סך הכל יש $2n+1$ אפשרויות שונות (בין 0 ל $2n$ צעדים ימינה).
ההסתברות להגיע למצב $2t$ היא $\binom{2n}{n+t}0.5^{2n}$. הביטוי $\binom{2n}{n+t}$ מקבל ערך מכסימלי עבור $t=0$.

זהו השכיח מבין $2n+1$ אפשרויות, לכן יש לו הסתברות של לפחות $\frac{1}{2n+1}$. מתקיים $\sum\frac{1}{2n+1}=\infty$. לכן מצב 0 הוא מצב נשנה.

<u>שאלה</u>
היכן נכשל נסיון בדרך זו להראות שעבור $p\neq 0.5$ מצב 0 הוא נשנה ? (נסיון שלא יכול להצליח כי כאשר $p\neq 0.5$, מצב 0 הוא חולף).

<u>תשובה</u>

בכל שלב מקבלים מצב שכיח אחר ואי אפשר לטעון שיש מצב שעבור כל $2n$, יש לו הסתברות של לפחות $\frac{1}{2n+1}$.

נחזור להילוך הסימטרי:
נסתכל על a - ההסתברות לחזור אי פעם למצב 0 אם מתחילים בו. זאת למעשה ההסתברות לחזור למצב 0 ממצב $+1$ או מצב -1 (כאן שנהם שווים).
ממצב $+1$ חוזרים למצב 0 ישירות בהסתברות 0.5 ואחרת מגיעים למצב $+2$. כדי לחזור ממצב $+2$ למצב 0, צריך קודם לחזור למצב $+1$ ולכך יש גם הסתברות a. לכן ההסתברות לחזור אי פעם ממצב 2 למצב 0 היא a^2. לכן מתקיים $a = 0.5 + 0.5a^2$. למשוואה זו אין פתרון $0 \le a < 1$. ההסתברות לחזור למצב 0 היא 1 שזה כן פתרון. מצב 0 הוא נשנה.

<u>שאלה</u>
מהי ההסתברות שבהילוך מקרי לא סימטרי נחזור אי פעם לראשית ?

<u>תשובה</u>
נניח בלי הגבלת הכלליות ש $p > q$.
לפי החוק החזק של המספרים הגדולים, לכל היותר במספר סופי של פעמים יהיה מספר הצעדים המצטבר שמאלה גדול ממספר הצעדים המצטבר ימינה. לכן החל מאיזשהו צעד, נהיה תמיד ימינה לראשית. לכן אם נעשה צעד ראשון שמאלה אז בהכרח נחלוף על הראשית באיזשהו שלב. אם נעשה צעד ראשון ימינה אז הסיכוי a לחזור לראשית מקיים את המשוואה: $a = q + pa^2$. למשוואה זאת יש פתרון בקטע $0 < a < 1$ והוא $a = \frac{q}{p}$. לכן

הסיכוי לחזור אי פעם לראשית הוא $q \cdot 1 + p\frac{q}{p} = 2q$ והסיכוי לא לחזור אף פעם הוא $1 - 2q = p - q$.

<u>דוגמא</u>
תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים: $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 0.5$
לכל $i \ge 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים $X_1, X_2, X_3, \cdots$.

<u>א.</u> הראו שעבור כל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$, קיים n טבעי כך שרציונלי זה יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$.

<u>ב.</u> *הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$ אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.*

<u>ג.</u> הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ 0.5 לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

<u>ד.</u> הראו שהרציונלי 0.5 יתקבל כמנה אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

<u>ה.</u> הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

ו. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

פתרון:

א. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

ב. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :

נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$ וגם $q_2 \cdot 10^n - p_2 \cdot 10^n \geq q_1 - p_1$.

המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

ג. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל 0.5 (0.5 זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ 0.5 בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ 0.5 מרוחק מ 0.5 ב $\varepsilon = \left|0.5 - \frac{p}{q}\right|$.

ד. הוכחנו שההילוך המקרי הסימטרי על הישר הוא נשנה, זאת אומרת שבהילוך זה בהסתברות 1 , אינסוף פעמים יהיו מספר הצעדים המצטברים ימינה שווה למספר הצעדים המצטברים שמאלה. לכן בסדרה שלנו כאן, בהסתברות 1 , אינסוף פעמים תהיה הפרופורציה המצטברת של התוצאות 1 מתוך כלל הנסיונות שווה בדיוק ל 0.5 .

הערה

העובדה שהממוצע שואף לחצי, לא מוכיחה שהוא שווה לחצי אין סוף פעמים.

ה. לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה 0.5 מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

ו. $P\left(\frac{S_3}{3} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_2}{2} = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$, $P\left(\frac{S_5}{5} = \frac{2}{3} \mid \frac{S_4}{4} = \frac{1}{2}\right) = 0$

(מדובר בהסתברויות מותנות).

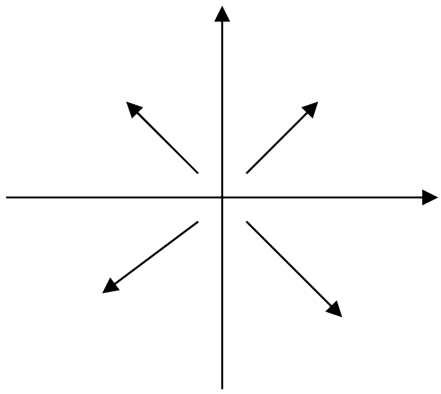
מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

הילוך מקרי סימטרי על שריג דו-מימדי

זהו הילוך שבו בכל שלב הולכים ימינה, שמאלה, למעלה או למטה כל אחד בסיכוי $\frac{1}{4}$.

כדי להיות לאחר מספר צעדים מסוים בנקודה ההתחלתית צריך שמספר הצעדים ימינה ישווה למספר הצעדים שמאלה ומספר הצעדים למעלה ישווה למספר הצעדים למטה. האינטואיציה אומרת שלכן בהילוך המקרי ה- d מימדי, ההסתברות להיות במקור לאחר מספר זוגי של צעדים מתנהגת כמו $\frac{1}{n^{0..5d}}$ וכך למשל בהילוך המקרי הדו-

מימדי היא מתנהגת כמו $\frac{1}{n}$ ומכיון ש $\sum\frac{1}{n}=\infty$ אז גם ההילוך הזה הוא נשנה. אבל זה לא כה פשוט, כי מספר המהלכים בציר מסוים תלוי במספר המהלכים בציר האחר.
זה היה יותר פשוט אילו היינו מדברים על הילוך מסוג אחר שבו בכל שלב בוחרים סימולטנית כיוון בכל מימד. כאן בהילוך האחר יש אי תלות בין הקורה במימדים השונים.



אבל בהילוך שלנו, אנו לא בוחרים בכל שלב כיוון בכל מימד. אנו עושים צעד רק באחד המימדים.
נמחיש כאן שיש תלות בין המאורעות של חזרה לראשית בשני המימדים.
יהי A - המאורע שלאחר שני מהלכים נהיה בנקודה 0 בציר ימין-שמאל.
יהי B - המאורע שלאחר שני מהלכים נהיה בנקודה 0 בציר למעלה-למטה.
$A\cap B$ זה המאורע שלאחר שני מהלכים נהיה בראשית.
כדי לחזור לראשית לאחר שני צעדים, הצעד השני צריך להיות צעד מנוגד לצעד הראשון,
לכן $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

$$P(A)=P(B)=0.5^2+2\cdot 0.25\cdot 0.25=\frac{3}{8}$$

(או ששני הצעדים הם בציר האחר או ששני הצעדים הם בציר המדובר, אבל בכיוונים מנוגדים).
נקבל ש $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ ולכן יש תלות בין הקורה בצירים השונים.

נציע שתי גישות כדי להתגבר על הבעיה.

הגישה הראשונה אינה אלגברית.
נשים לב שבהילוך האחר, כדי להיות בראשית בשלב מסוים, חייבים שמספר צעדי הימין ולמעלה יהיה שווה למספר צעדי השמאל ולמטה וגם מספר צעדי שמאל ולמעלה יהיה שווה למספר צעדי הימין ולמטה.
גם בהילוך הזה (האחר) יש בכל שלב 4 מהלכים אפשריים וכדי לחזור לראשית, צריך שיוויון במספר הצעדים בשני זוגות. לכן סיכויי החזרה לראשית הם זהים בשני המימדים (האחד הוא סיבוב של האחר). אבל, אנו יודעים שבהילוך הזה (האחר) הסיכוי להיות בראשית לאחר מספר זוגי של n צעדים הוא בסדר גודל של $n^{-0.5}n^{-0.5}=\frac{1}{n}$ (יש אי תלות בין הקורה במימד ימין שמאל לבין הקורה במימד למטה למעלה). לכן מכיון ש $\sum\frac{1}{n}=\infty$, אז שני התהליכים הם נשנים.

הגישה השניה היא אלגברית.

שוב ניתן לחזור למקור רק לאחר מספר זוגי של צעדים. כדי לחזור למקור צריך מספר הצעדים ימינה להיות שווה למספר הצעדים שמאלה ומספר הצעדים למעלה צריך להיות שווה למספר הצעדים למטה.

$$P^{(2n)}_{(0,0),(0,0)}=\sum_{0\le k\le n}\frac{(2n)!}{k!\cdot k!\cdot(n-k)!(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum\binom{n}{k}\binom{n}{k}=$$
$$=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\sum\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

לפי נוסחת סטרלינג מתקיים:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cong\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4n\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2n\pi}}=\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

לכן $P^{(2n)}_{0,0}$ מתנהג אסימטוטית כמו $\frac{1}{n}$. ומכיון ש $\sum\frac{1}{n}=\infty$ אז מצב 0 ואיתו כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

כאן ננסה להמחיש מדוע ההילוך המקרי התלת מימדי הוא חולף (זאת רק המחשה שלא מובאת כאן כהוכחה).
כדי לחזור למקור לאחר $2n$ צעדים צריכים מספר מספר שווה של צעדים בכל ציר לכל אחד משני הכיוונים.
ראינו שאם הולכים במימד מסוים סדר גודל של n צעדים, אז ההסתברות שמתוכם יהיה מספר שווה של צעדים בשני הכיוונים מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$. אבל לפי החוק החזק של המספרים הגדולים, רק מספר סופי של פעמים מספר הצעדים במימד מסוים יהיה קטן מלמשל פרופורציה של $\frac{1}{8}$ מהמהלכים.
בכל הפעמים שבהם לא תהיה סטייה גדולה זו, ההסתברות שמספר הצעדים בשני הכיוונים יקזזו זה את זה מתנהגת כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מכיון שבהינתן שהלכנו מספר פעמים מסוים בכל מימד, אז אין תלות בין מה שקורה במימדים שונים, אז ההסתברות לחזור לראשית לא תהיה יותר מסדר גודל של $\left(\frac{1}{n}\right)^{1.5}$. מכיון ש $\sum\left(\frac{1}{n}\right)^{1.5}<\infty$ אז רק מספר סופי של פעמים נבקר בראשית. בנוסף רק מספר סופי של פעמים יהיה מספר הצעדים במימד מסוים קטן מפרופורציה של $\frac{1}{8}$. מספר סופי של פעמים לא מענין אותנו.
זה היה לגבי הדיון הלא פורמלי.

<u>שאלה</u>
האם קיימת שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בלתי פריקה שבה קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}X_n$.

<u>תשובה</u>
בשרשרת אינסופית זה יתכן. נסתכל על הילוך מקרי לא סימטרי על קבוצת המצבים שהם החזקות של 2 2^k עבור $-\infty<k<+\infty$. נניח שממצב 2^k עוברים בסיכוי $\frac{2}{3}$ למצב 2^{k-1} ובסיכוי $\frac{1}{3}$ עוברים למצב 2^{k+1} .
זאת שרשרת בלתי פריקה חולפת בה יש כמו בהילוך המקרי הלא סימטרי בריחה לכיוון החזקות השליליות של 2.
כך יש שאיפה ל 0.

שאלה

האם זה יכול לקרות בשרשרת סופית בלתי פריקה.

תשובה

זה לא יכול לקרות בשרשרת סופית בלתי פריקה בת יותר ממצב אחד.
במחלקה בלתי פריקה בת מספר סופי של מצבים כל המצבים הם נשנים. בין כל מספר סופי של מספרים יש אוסף סופי של מרחקים. נבקר אינסוף פעמים בלפחות שני מצבים שהמרחק בינהם הוא מספר סופי קבוע. לכן אין גבול ל X_n . למי שמכיר: תנאי קושי לא מתקיים.

מבוא לתהליכים סטוכסטיים

גבולות ונשנות חיובית

שלומי

<u>משוואת ההתחדשות</u>

אם מתחילים במצב וחוזרים אליו אז החזרה הראשונה אליו התרחשה עד שלב n לכל המאוחר. אחרי שהגענו אליו לראשונה שוב, יש מעבר ממנו אל עצמו. מגיעים למצב לראשונה כמובן לא יותר מפעם אחת. מהסתברות שלמה נקבל $P_{i,i}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{i,i}^{(k)} P_{i,i}^{(n-k)}$ בנוסף $P_{i,i}^{(0)}=1$.

ניתן להכליל את המשוואה עבור $i \neq j$: $P_{i,j}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}$ ו $P_{i,j}^{(0)}=0$.

<u>טענה</u>

הראנו שלגבי מצב חולף מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{j,j}^{(n)}<\infty$. נראה שעבור מצב j חולף ועבור כל מצב i מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,j}^{(n)}<\infty$.

<u>הסבר</u>

או שלא מגיעים למצב זאת אומרת שאין בכלל ביקורים בו, או שמגיעים אליו, אבל אז תוחלת מספר הביקורים לאחר הביקור הראשון הוא גם סופי כי הרי המצב הוא חולף.

<u>הוכחה אחרת</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,j}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)} \stackrel{I}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}=\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} P_{j,j}^{(n-k)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)}=\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}^{(k)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)}\right)<\infty$$

I . בטור של איברים אי שליליים, אפשר לשנות סדר סכימה.

<u>טענה</u>

עבור מצב חולף j מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{i,j}^{(n)}=0$.

(הראנו שעבור מצב חולף $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,j}^{(n)}<\infty$ ואם הטור מתכנס אז האיבר הכללי שואף לאפס).

נשתמש במסקנה זו כדי לקבל את הטענה הבאה שכבר הראנו בדרך אחרת.

<u>טענה</u>

בשרשרת סופית קיים לפחות מצב נשנה אחד.

<u>הוכחה</u>

נסתכל על מצב קבוע 1. מתקיים עבור כל n קבוע $\sum_{j} P_{1,j}^{(n)}=1$. (בכל שלב נמצאים באיזשהו מצב וסכום ההסתברויות להיות במצבים השונים בשלב מסוים הוא 1).נניח בשלילה שכל המצבים הם חולפים. במקרה זה

עבור כל מצב j קיים N_j כך שעבור כל $n > N_j$ מתקיים $P_{1,j}^{(n)} < \frac{1}{M}$, כאשר M הוא מספר מצבי השרשרת.

נבחר $N = \max_j \{N_j\}$. עבור כל $n > N$ מתקיים $P_{1,j}^{(n)} < \frac{1}{M}$ עבור כל מצב j . לכן מתקיים

$\sum_j P_{1,j}^{(n)} < M\frac{1}{M} = 1$ וקבלנו סתירה לכך שסכום ההסתברויות בזמן קבוע הוא 1.

לכן בשרשרת סופית קיים לפחות מצב נשנה אחד.

<u>הערה</u>

אם יש מספר סופי של מצבים אז לא יתכן שמעתה ועד עולם נבקר בכל אחד מהם רק מספר סופי של פעמים. לכן לפחות במצב אחד נבקר אינסוף פעמים. מצב שבו נבקר אינסוף פעמים הוא מצב נשנה.

<u>טענה</u>

במחלקה בלתי פריקה בעלת מספר סופי של מצבים, כל המצבים הם נשנים.

<u>הוכחה</u>

הראנו שיש לפחות מצב נשנה אחד. מכיוון שנשנות היא תכונה מחלקתית אז אם במחלקה בלתי פריקה יש מצב נשנה אחד, אז כל המצבים הם נשנים.

<u>נשנות חיובית ונשנות אפס</u>

הגדרנו מצב נשנה חיובי כמצב שתוחלת זמן החזרה אליו היא סופית ומצב נשנה אפס כמצב נשנה שתוחלת זמן החזרה אליו היא אינסופית.

הצגנו <u>קריטריון לנשנות אפס</u>.

הקריטריון: מצב i הוא נשנה אפס אם הוא נשנה וקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}{}^{(n)} = 0$.

נתן <u>דוגמא</u> למצב נשנה אפס.

שרשרת בעלת מרחב המצבים שהם השלמים האי-שליליים. נניח שמתקיים $P_{0,i} = \frac{1}{i(i+1)}$ עבור כל $i \geq 1$ ו $P_{i,i-1} = 1$ עבור כל $i \geq 1$.

אם ממצב 0 מגיעים למצב i , אז עושים צעד אחד למצב i ו i צעדים למצב 0 ובסך הכל $i+1$ צעדים עד חזרה למצב 0. לכן תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\infty = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}(i+1)$.

בהוכחת המשפט שממנו בין היתר נובע הקריטריון, יש שימוש בזהות $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P_{i,i}{}^{(n-k)} r_k$ כאשר A_n הוא המאורע שאם יצאנו ממצב i , נבקר בו באיזשהו שלב החל מהשלב ה-n (אולי גם באיזשהו שלב לפני כן) כאשר $r_k = \sum_{t=k}^{\infty} f_{i,i}{}^{(t)}$.

<u>הסבר</u>

עוברים על פני כל המקרים של ביקור במצב i בשלב ה- $n-k$ ושאז זמן החזרה למצב i אחר-כך הוא לפחות k (אבל כן חוזרים אחר-כך). אם היה ביקור נוסף לפני השלב ה-n אז הוא נסכם במקרה אחר.

כך יש חלוקה לפי מקרים של הביקור האחרון עד שלב ה- n כאשר $n-k$ מקבל ערכים עד $n-1$.

מכיון שבמצב נשנה מבקרים אינסוף פעמים אז עבור מצב נשנה i מתקיים $\sum_{k=1}^{n} P_{i,i}^{(n-k)} r_k = 1$ עבור כל n .

עכשיו ננסח את המשפט שממנו נובע הקריטריון וגם יותר מזה.

<u>משפט</u>

בשרשרת מרקוב מתקיים לגבי מצב נשנה ולא מחזורי i שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = \pi_i$ כאשר $\pi_i = \frac{1}{E_i}$ כאשר E_i היא תוחלת זמן החזרה ממצב i לעצמו.

תחילה נתן שתי <u>טענות עזר</u> שדומות אחת לשניה:

<u>טענות עזר</u>:

אם λ הוא הגבול העליון של $P_{i,i}^{(n)}$ ואם m_n היא סדרה עולה של טבעיים כך ש $\lim P_{i,i}^{(m_n)} = \lambda$ ויהי l טבעי המקיים $f_{i,i}^{(l)} > 0$ אז גם $\lim P_{i,i}^{(m_n - l)} = \lambda$.

ובאופן דומה

אם μ הוא הגבול התחתון של $P_{i,i}^{(n)}$ ואם m_n היא סדרה עולה של טבעיים כך ש $\lim P_{i,i}^{(m_n)} = \mu$ ויהי l טבעי המקיים $f_{i,i}^{(l)} > 0$ אז גם $\lim P_{i,i}^{(m_n - l)} = \mu$.

ההוכחות לשתי הטענות הן דומות. נוכיח את הטענה הראשונה לגבי הגבול העליון.

<u>הוכחה</u>

נשתמש במשוואת ההתחדשות.

$$P_{i,i}^{(m_n)} = \sum_{k=1}^{m_n} f_{i,i}^{(k)} P_{i,i}^{(m_n-k)} = \left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}^{(k)} P_{i,i}^{(m_n-k)} \right) + f_{i,i}^{(l)} P_{i,i}^{(m_n-l)} + \left(\sum_{k=t+1}^{m_n} f_{i,i}^{(k)} P_{i,i}^{(m_n-k)} \right)$$

פרקנו את הסכום במשוואת ההתחדשות לשלושה חלקים, כאשר דאגנו ש m_n ו t יהיו מספיק גדולים כך שיתקיימו כמה דברים:

1. $P_{i,i}^{(m_n)} > \lambda - \varepsilon$ (מכיון שמדובר בגבול העליון אז עבור $\varepsilon > 0$ החל ממקום מסוים בתת הסדרה מתקיים תמיד ש $P_{i,i}^{(m_n)} > \lambda - \varepsilon$).
2. $P_{i,i}^{(n)} < \lambda + \varepsilon$ עבור כל $n > t$ (הרי λ הוא הגבול העליון ולכן עבור $\varepsilon > 0$ נתון רק עבור מספר סופי של ערכי n מתקיים $P_{i,i}^{(n)} \geq \lambda + \varepsilon$). נבחר $m_n > 2t$ כך שעבור $k \leq t$ יתקיים $m_n - k > t$.
3. $\sum_{n=t+1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} < \varepsilon$ וכמו-כן $t > l$ (הטור מסתכם בלכל היותר 1 ולכן יש לו זנב קטן כרצוננו).

לכן נקבל

$$\lambda - \varepsilon < P_{i,i}^{(m_n)} \leq \left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}^{(k)} (\lambda + \varepsilon) \right) + f_{i,i}^{(l)} P_{i,i}^{(m_n-l)} + \sum_{k=t+1}^{m_n} f_{i,i}^{(k)}$$

או

$$\lambda-\varepsilon<\left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}{}^{(k)}(\lambda+\varepsilon)\right)+f_{i,i}{}^{(l)}P_{i,i}{}^{(m_n-l)}+\varepsilon$$

או

$$\lambda-2\varepsilon<\left(\sum_{k=1,k\neq l}^{t} f_{i,i}{}^{(k)}(\lambda+\varepsilon)\right)+f_{i,i}{}^{(l)}P_{i,i}{}^{(m_n-l)}$$

$$\lambda-2\varepsilon<\left(1-f_{i,i}{}^{(l)}\right)(\lambda+\varepsilon)+f_{i,i}{}^{(l)}P_{i,i}{}^{(m_n-l)}$$

נשים לב שבאגף ימין יש שקלול של ערכים לפי משקולות $f_{i,i}{}^{(k)}$ שמסתכמות בלכל היותר 1

($\sum_{k=1}^{t} f_{i,i}{}^{(k)} \le \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,i}{}^{(k)}=1$). החלק שמחוץ ל $\sum$ לא יכול להיות קטן מידי כי אחרת השקלול לא יהיה גדול

מ $\lambda-2\varepsilon$. לכן נוכל לקבל (גם על-ידי חישוב) ש $P_{i,i}{}^{(m_n-l)}>\lambda+\varepsilon-\frac{3\varepsilon}{f_{i,i}{}^{(l)}}$.

מכיון ש $f_{i,i}{}^{(l)}$ הוא קבוע אז נקבל שמתקיים $\lim P_{i,i}{}^{(m_n-l)}=\lambda$.

כאמור, ההוכחה עבור הגבול התחתון היא דומה.

כעת ניגש ל<u>הוכחת המשפט</u>

נסתכל על מצב i נשנה לא מחזורי, תהי m_n סידרה של טבעיים כך ש $\lim P_{i,i}{}^{(m_n)}=\lambda=\overline{\lim}P_{i,i}{}^{(n)}$.

מכיון שהמחזור של מצב i הוא 1 אז קבוצת הטבעיים $\{l \mid f_{i,i}{}^{(l)}>0\}$ היא קבוצה בעל מחלק משותף מכסימלי של 1 והיא יוצרת חבורה למחצה כך שקיים l_0 כך שעבור כל $l>l_0$ כל טבעי שייך לחבורה למחצה. לכן עבור כל $k\ge 0$ מתקיים $\lim P_{i,i}{}^{(m_n-l_0-k)}=\lambda$.

<u>הסבר</u>

אם מתקיים שעבור l_1 בסדרת הנקודות m_n-l_1 יש התכנסות לגבול העליון עבור כל תת סדרה $\{m_n\}$ שבה יש התכנסות לגבול העליון וגם בסדרת הנקודות m_n-l_2 יש התכנסות לגבול העליון עבור כל תת סדרה $\{m_n\}$ שבה יש התכנסות לגבול העליון אז גם בסדרת הנקודות $m_n-l_1-l_2$ יש התכנסות לגבול העליון וכך בגלל שהמחלק המשותף המכסימלי הוא 1 אז החל ממקום מסוים l_0 , עבור כל טבעי $l>l_0$ מתקיים $\lim P_{i,i}{}^{(m_n-l)}=\lambda$.

<u>הערה</u>

זה עדיין לא מוכיח את הטענה ש $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}{}^{(n)}=\lambda$ כי דרוש לנו להציג את n כהפרש של איברי m_n ואיברים בחבורה למחצה שערכם שואף לאינסוף בזמן שההתכנסות אינה אחידה בכל נקודה.

<u>נחזור להוכחה</u>

מכיון שמצב i הוא נשנה אז מתקיים עבור כל n : $1=\sum_{k=1}^{n} P_{i,i}{}^{(n-k)}r_k$. כך מתקיים עבור $n=m_n-l_0$:

$$1=\sum_{k=1}^{m_n-l_0} P_{i,i}{}^{(m_n-l_0-k)}r_k \ .$$

נבחר s קבוע כך ש $m_n-l_0-s>s$ ונקבל $1\ge\sum_{k=1}^{s} P_{i,i}{}^{(m_n-l_0-k)}r_k$.

נשאיף את m_n לאינסוף ונקבל $1\ge\sum_{k=1}^{s}\lim P_{i,i}{}^{(m_n-l_0-k)}r_k=\lambda\sum_{k=1}^{s} r_k$

(כל אחד מהמחוברים שבסכום שואף לגבול ולכן סכום של מספר סופי שלהם גם שואף לגבול).

לכן עבור כל s מתקיים $\lambda \le \frac{1}{\sum_{k=1}^{s} r_k}$. על-ידי השאפת s לאינסוף נקבל $\lambda \le \frac{1}{E_i}$.

לכן במקרה ש i הוא נשנה אפס נקבל ש $\lambda = 0$. אם הגבול העליון הוא 0 , אז קיים גבול של 0 והוכחנו את הטענה עבור מצב נשנה אפס.

כעת נתייחס למקרה ש i הוא מצב נשנה חיובי.

במקרה זה $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty$. נניח ש $\lim P_{i,i}^{(m_n)} = \mu$ כאשר μ הוא הגבול התחתון.

אז נקבל עבור כל s קבוע

$$1 \le \sum_{k=1}^{s} r_k P_{i,i}^{(m_n-l_0-k)} + \sum_{k=s+1}^{m_n-l_0} r_k \le \sum_{k=1}^{s} r_k P_{i,i}^{(m_n-l_0-k)} + \sum_{k=s+1}^{\infty} r_k$$

עבור ε נתון נבחר S מספיק גדול כך שעבור כל $s > S$ מתקיים $\sum_{k=s+1}^{\infty} r_k < \varepsilon$. נקבל

$1-\varepsilon \le \sum_{k=1}^{s} r_k P_{i,i}^{(\mu_n-l_0-k)}$. אם נשאיף את m_n לאין סוף אז נקבל $1-\varepsilon \le \mu \sum_{k=1}^{s} r_k$. ולכן $\mu \ge \frac{1-\varepsilon}{\sum_{k=1}^{s} r_k}$. נשאיף

את s לאין סוף ונקבל $\mu \ge \frac{1-\varepsilon}{\sum_{k=1}^{\infty} r_k}$ או $\mu \ge \frac{1-\varepsilon}{E_i}$. זה מתקיים עבור כל ε נתון ולכן $\mu \ge \frac{1}{E_i}$.

קבלנו $\mu \ge \frac{1}{E_i}$, $\lambda \le \frac{1}{E_i}$. אבל כמובן $\lambda \ge \mu$ (הגבול העליון לא קטן מהגבול התחתון).

לכן $\lambda = \mu = \frac{1}{E_i}$ וקיימת הסתברות גבולית ששווה ל $\frac{1}{E_i}$.

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ המשך גבולות ונשנות חיובית</u>

שלומי

<u>טענה</u>

נרצה להראות שגם בשרשרת מחזורית $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i נשנה הוא נשנה אפס אם"ם מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$.

<u>הוכחה</u>

נסתכל על שרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ המקיימת $Y_n = X_{nd}$.

בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא מצב נשנה (כי הוא נשנה בשרשרת המקורית ולכן חוזרים אליו באיזשהו שלב בהסתברות 1, אבל חוזרים אליו רק בכפולות של d).

בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא לא מחזורי (כי בשרשרת המקורית, החל ממקום מסוים $P_{i,i}^{(n)} > 0$ לכל n שהוא כפולה שלמה של d).

תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב i בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שווה ל d כפול התוחלת בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ (כי כל צעד ב $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מבטא d צעדים ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$).

לכן אם באחת השרשרות תוחלת זמן החזרה היא סופית אז גם בשניה היא סופית.

אם ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ אז מתקיים בה גם $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(nd)} = 0$ וההסתברות הגבולית היא אפס גם ב $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

אם ב $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ אז גם ב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ (כי ניתן בכלל לחזור למצב רק בכפולות של d).

נקבל

מצב נשנה i הוא נשנה אפס בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$ מצב i הוא נשנה אפס בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$

$\overset{1}{\Leftrightarrow}$ בשרשרת $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא נשנה ומתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ בשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מצב i הוא נשנה ומתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$.

[1]. על-פי הקריטריון לנשנות אפס במחלקה לא מחזורית.

נציג כאן בטבלה את המקרים השונים של מצבים נשנים חיובית או נשנים אפס ומחזוריים או לא מחזוריים.

לא מחזורי	מחזורי	
קיימת הסתברות גבולית חיובית ששווה לאחד חלקי תוחלת זמן החזרה למצב.	לא קיימת הסתברות גבולית. קיימת תת סדרה שבה ההסתברויות הגבוליות הן חיובית וקיימת תת סדרה שבה ההסתברויות הן אפס.	נשנה חיובית
קיימת הסתברות גבולית של אפס.	קיימת הסתברות גבולית של אפס. יש אין סוף זמנים שבהם הסתברויות המעבר הן בדיוק אפס. יש אין סוף זמנים שבהם היא חיובית. אבל היא שואפת לאפס.	נשנה אפס

הגדרנו וקטור הסתברויות סטציונרית של שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר M כוקטור הסתברויות המקיים $\pi M = \pi$.

<u>טענה</u>

במחלקה בלתי פריקה ולא מחזורית שכל מצביה הם נשנים חיובית אז וקטור ההסתברויות הגבוליות הוא וקטור סטציונרי יחיד.

קצת אינטואיציה בנושא: טבעי שהגבול יהיה נקודת שבת. ראינו שיש התכנסות מכל מצב התחלתי אל וקטור מסוים. לכן שום וקטור אחר לא יכול להיות נקודת שבת. צריך להראות שהוקטור הגבולי הוא וקטור הסתברויות, זאת אומרת שרכיביו מסתכמים ב 1. במחלקה סופית בלתי פריקה ובלתי מחזורית, נבחר מצב מסוים שנקרא לו 1. מתקיים עבור כל n סופי $\sum_i P_{1,i}^{(n)} = 1$ כאשר הסכימה היא על מצבי השרשרת. מתקיים

$\sum_i \lim_{n\to\infty} P_{1,i}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_i P_{1,i}^{(n)} = 1$ (כאשר סוכמים מספר סופי של גבולות אז המעבר הראשון מותר).

<u>לגבי שרשרת נשנת חיובית ומחזורית</u>

נסתכל על מצב מסוים בשרשרת בלתי פריקה בעלת מחזור d נקרא לו מצב 0. ממצב זה ניתן להגיע לכל מצבי השרשרת. נחלק את מצבי השרשרת לפי שארית החלוקה ב d של הזמנים שניתן להגיע אלהם.
כל מצב נמצא בדיוק באחת מקבוצות אלה (אחרת המחזור לא היה שווה ל d). כל אחת מהקבוצות האלה היא מחלקה בלתי פריקה בעלת מחזור 1 של השרשרת בעלת מטריצת מעבר M^d. כאשר M היא מטריצת המעבר של השרשרת המקורית. לכן לכל קבוצה כזאת יש וקטור סטציונרי יחיד.
נסתכל על הוקטור שהוא ממוצע של d הוקטורים הסטציונרים האלה. ברור שסכום רכיביו הוא 1.

<u>טענה</u>

זהו וקטור סטציונרי של השרשרת המחזורית.

<u>הסבר</u>

נסתכל על הוקטור הסטציונרי היחיד של הקבוצה שאליה שיך מצב 0. נקרא לוקטור זה π.
נראה ש πM הוא וקטור סטציונרי של המטריצה M^d בקבוצה שאליה ניתן להגיע עם שארית חלוקה 1.
מתקיים $(\pi M)M^d = (\pi M^d)M = \pi M$ ולכן הוא אכן וקטור סטציונרי של קבוצה זו. מהיחידות של וקטור סטציונרי במחלקה לא מחזורית, נקבל שזהו הוקטור היחיד. באינדוקציה נוכל לקבל שעבור כל $0 \le k \le d-1$ πM^k הוא הוקטור הסטציונרי של קבוצת המצבים שאליהם ניתן להגיע בשארית חלוקה של k.

<u>טענה</u> (לגבי יחידות)

גם במחלקה מחזורית קיים לכל היותר וקטור סטציונרי אחד.

<u>הסבר</u>

וקטור סטציונרי הוא נקודת שבת. נקודת שבת של M היא בהכרח גם נקודת שבת של M^d.
בכל אחת מ d הקבוצות יש נקודת שבת יחדה ל M^d שהיא מטריצת מעבר של שרשרת לא מחזורית.
לכן בכל וקטור סטציונרי של השרשרת כולה, אוסף הרכיבים ששיכים לקבוצה מסוימת הוא יחיד עד כדי מכפלה בקבוע. מכיון שהתהליך עובר על כל הקבוצות בסדר ציקלי אז לגבי כל קבוצה, אוסף רכיביה צריך להסתכם ב $\frac{1}{d}$. לכן קיים רק וקטור סטציונרי יחיד.

<u>דוגמא</u> לחישוב וקטור הסתברויות סטציונרי

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

וקטור ההסתברויות הסטציונרי מקיים

$$(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\end{pmatrix}$$

ו

$$\pi_1+\pi_2=1$$

לכן

$$\begin{cases}0+0.5\pi_2=\pi_1\\ \pi_1+0.5\pi_2=\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

לכן מתקבל וקטור הסתברויות סטציונרי יחיד $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

<u>דוגמא</u>

שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

קיימות שתי מחלקות בלתי פריקות קיים וקטור סטציונרי $(1,0,0)$ וגם וקטור סטציונרי $(0,0.5,0.5)$.
כל קומבינציה קמורה שלהם מקיימת את מערכת המשוואת $\pi M=\pi$. לכן אוסף כל הוקטורים הסטציונרים הוא $a(1,0,0)+(1-a)(0,0.5,0.5)$ עבור כל $0\le a\le 1$.

<u>דוגמא</u>

שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

יש שתי מחלקות בלתי פריקות של מצבים סופגים. אוסף הוקטורים הסטציונרים הוא $a(1,0,0)+(1-a)(0,0,1)$ עבור $0\le a\le 1$. בכל וקטור סטציונרי מתקיים $\pi_2=0$.
זה מבטא את העובדה שמצב 2 אינו נשנה חיובי. הוא מצב חולף.

בשרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

יש וקטור הסתברויות סטציונרי יחיד $(0.5,0.5)$. זה מבטא את העובדה שהשכיחות של הביקורים במצבים השונים שואפת לחצי עבור כל מצב התחלתי. אבל אין הסתברויות גבוליות למצבים כי השרשרת מחזורית.

<u>דוגמא</u> לתופעה זו בשרשרת אינסופית

שרשרת מרקוב שמרחב מצביה הם השלמים האי-שליליים. נניח ש $P_{0,i}=0.5^i$ עבור $i\ge 1$ ו $P_{i,0}=1$ עבור כל $i\ge 1$. מצב 0 הוא נשנה חיובי כי בכל מקרה כאשר מתחילים בו אז חוזרים אליו תוך שני צעדים. לכן תוחלת זמן

החזרה אליו היא 2 ויש לו הסתברות סטציונרית $\frac{1}{2}$. אבל אין לו הסתברות גבולית. יש שני גבולות חלקיים שאחד מהם הוא 1 והשני הוא 0.

<u>שאלה</u>
מתי קיימת הסתברות גבולית עבור שרשרת מחזורית (מחזורית = בעלת מחזור גדול מ 1) ?

<u>תשובה</u>
כאשר המצב חולף או נשנה אפס אז ההסתברות הגבולית היא אפס.

<u>דוגמא</u>
האם הילוך מקרי סימטרי על הישר הוא נשנה חיובי ?

מצבי השרשרת הבלתי פריקה הזאת הם נשנים אפס.
<u>נימוק ראשון:</u>
ראינו ש $P_{0,0}^{(2n+1)} = 0$ לכל n וש $P_{0,0}^{(2n)}$ מתנהג כמו $\frac{1}{\sqrt{n}}$ כאשר $n \to \infty$. מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ וגם כמובן הגבול של סדרת אפסים הוא 0. ולכן מצב 0 ואיתו כל מצבי השרשרת הבלתי פריקה אינם נשנים חיובית.
<u>נימוק שני:</u>
אילו למצב 0 היתה הסתברות סטציונרית חיובית אז משיקולי סימטריה, לכל מצבי השרשרת הבלתי פריקה היתה באותו וקטור סטציונרי אותה הסתברות סטציונרית חיובית. כך סכום ההסתברויות הסטציונריות על-פני המצבים היה מסתכם ב ∞. זה כמובן לא יתכן.
<u>נימוק שלישי:</u>
ממצב 0 הולכים למצב 1 או למצב -1. נראה שתוחלת מספר הצעדים עד חזרה ממצב 1 למצב 0 היא ∞. כך תוחלת מספר הצעדים עד חזרה מ 0 ל 0 היא ∞.
יהי $e_{1,0}$ - תוחלת זמן ההגעה מ 1 ל 0, $e_{2,1}$ - תוחלת זמן ההגעה מ 2 ל 1 , $e_{2,0}$ - תוחלת זמן ההגעה מ 2 ל 0.
משיקולי סימטריה מתקיים $e_{2,1} = e_{1,0}$ לכן $e_{2,0} = e_{2,1} + e_{1,0} = 2e_{1,0}$.
מתקיים: $e_{1,0} = 0.5 \cdot 1 + 0.5(e_{2,0} + 1)$ (כי כאשר מתחילים ב 1או שמבזבזים צעד והולכים ישירות ל 0 או שמבזבזים צעד והולכים ל 2 ואז צריך לחזור מ 2 ל 0) לכן $e_{1,0} = 1 + e_{1,0}$. למשוואה זו אין פתרון סופי ולכן תוחלת זמן החזרה מ 1 ל 0 אינה סופית.

<u>שאלה</u>
מבצעים סדרה אינסופית של הטלות של קוביה הוגנת. יהי S_n סכום n ההטלות הראשונות.
עבור n גדול, מהי ההסתברות ש S_n הוא כפולה שלמה של 7 ?

<u>תשובה</u>
נגדיר שרשרת ששבעת מצביה הם השאריות האפשריות בחלוקה ב 7.

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

זאת מטריצה בלתי פריקה כי לכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (למשל בצעדים של 1). זאת היא מטריצה לא מחזורית כי למשל ניתן לחזור ממצב לעצמו בשני צעדים או בשלושה צעדים. במטריצה בלתי פריקה ונשנית חיובית קיים וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד. אם המטריצה היא גם לא מחזורית אז קיימות הסתברויות גבוליות ששות לרכיבי הוקטור הסטציונרי. כאן משיקולי סימטריה הוקטור הסטציונרי היחיד הוא $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$.

<u>הגדרה</u>

מטריצה דו-סטוכסטית היא מטריצה סטוכסטית שגם כל עמודה שלה מסתכמת ב 1.

<u>טענה</u>

במטריצה דו סטוכסטית סופית קיים וקטור הסתברויות סטציונרי שכל רכביו שווים.

<u>נימוק</u>

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_{i,j}=\frac{1}{n}$ כאשר ה- $a_{i,j}$ מסתכמים ב 1 עבור כל j .

המטריצה הקודמת של הטלות הקוביה היתה סטוכסטית כפולה ובלתי פריקה . מכאן יכולנו להסיק לגביה את ההסתברויות הגבוליות.

<u>הערה</u>

לגבי שרשרת אינסופית, אין וקטור באורך אינסופי שכל רכיביו שווים ושהם מסתכמים ב 1.

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הרצאה 7

שלומי

<u>טענה</u>

נשנות חיובית היא תכונה מחלקתית.

<u>הוכחה</u>

נניח שמצבים i ו j מקושרים ומתקיים שלגבי מצב i לא קיים גבול אפס ל $P_{i,i}^{(n)}$ כאשר $n \to \infty$. אז קיימת תת סדרה $n_k \to \infty$ כך ש $\lim_{n_k \to \infty} P_{i,i}^{(n_k)} = \lambda$ כאשר $\lambda > 0$. מכיון שמצבים i ו j הם מקושרים אז קיים מסלול באורך t מ j ל i וקיים מסלול באורך s מ i ל j.

מתקיים $P_{j,j}^{(n_k+t+s)} \geq P_{j,i}^{(t)} P_{i,i}^{(n_k)} P_{i,j}^{(s)}$ וכאשר $n_k \to \infty$ אז הביטוי שבאגף שמאל לא יכול לשאוף לגודל שקטן מ $\lambda P_{j,i}^{(t)} P_{i,j}^{(s)}$. לכן הוא לא יכול לשאוף לאפס.

<u>טענה</u>

נשנות אפס היא תכונה מחלקתית.

<u>הסבר</u>

ראינו כבר בתקציר קודם שנשנות היא תכונה מחלקתית. כעת ראינו שנשנות חיובית היא תכונה מחלקתית. נניח שמצבים i ו j הם מקושרים וש i הוא נשנה אפס. מכיון ש i הוא נשנה אז גם j הוא נשנה. מכיון ש i הוא נשנה אפס אז הוא אינו נשנה חיובי ולכן גם j אינו נשנה חיובי. מצב שהוא נשנה אך לא נשנה חיובי הוא נשנה אפס. לכן מצב j הוא נשנה אפס.

<u>טענה</u>

בשרשרת סופית אין מצבים נשנים אפס.

<u>הסבר</u>

כל מצב שאינו ארגודי הוא חולף.

נראה שלגבי מצב ארגודי בשרשרת סופית, תוחלת זמן החזרה אליו היא סופית.

יהי Z - זמן החזרה הראשונה למצב i.

למצב i ארגודי בשרשרת סופית בת M מצבים ניתן להגיע מכל מצב אחר תוך לכל היותר M צעדים. ממצב j יש הסתברות של a_j להגיע למצב i בלכל היותר M צעדים. מתקיים עבור כל j ש $a_j > 0$.

נגדיר a להיות הערך המינימלי של ערכי a_j. המינימום של מספר סופי של מספרים חיובים הוא חיובי.

הסיכוי לא לחזור למצב i בשום שלב עד שלב n הוא לא גדול מ $(1-a)^{\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor}$.

לפי נוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי שליליים, תוחלת זמן החזרה למצב i לא גדולה מ $E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Z \geq n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-a)^{\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor} < \infty$.

בעזרת הטענות הבאות, נוכל גם לראות <u>בדרך נוספת</u> שאין מצבים נשנים אפס בשרשרת סופית.

<u>טענה</u>

לגבי מצב j שאינו נשנה חיובי מתקיים עבור כל מצב i: $\lim_{n \to \infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$.

הוכחה

מתקיים $P_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}$. הטור $f_{i,j}^{(k)}$ הוא טור מתכנס (שמסתכם לכל היותר ב 1).

לכן עבור $\varepsilon > 0$ נתון, קיים לו זנב החל ממקום N_1 שקטן מ ε . מכיון שמצב j הוא מצב שאינו נשנה חיובי, אז קיים N_2 , כך שעבור כל $n > N_2$ מתקיים $P_{j,j}^{(n)} < \varepsilon$. נבחר $N = N_1 + N_2$, אז עבור כל $n > N$.

סכום N_1 האיברים הראשונים בטור המכפלות קטן מ ε וסכום יתר האיברים גם קטן מ ε. לכן עבור כל $n > N$, $P_{i,j}^{(n)} < 2\varepsilon$.

טענה

במחלקה סופית של מצבים קיים לפחות מצב נשנה חיובי אחד.

הוכחה

נניח שכל המצבים אינם נשנים חיובים, אז עבור כל מצב j , קיים N_j כך שעבור כל $n > N_j$ מתקיים $P_{1,j}^{(n)} < \frac{1}{M}$ כאשר M הוא מספר מצבי המחלקה. נבחר $N = \max\{N_j\}$. עבור $n > N$ מסוים הסתברויות המעבר ממצב 1 למצבים השונים מסתכמים בפחות מ 1 וקבלנו סתירה.

לכן בכל מחלקה סופית קיים לפחות מצב נשנה חיובי אחד.

מסקנה

בשרשרת סופית אין מצבים נשנים אפס.

הסבר

כאמור בכל מחלקה סופית יש לפחות מצב נשנה חיובי אחד. מכיון שנשנות חיובית היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים במחלקה של המצב הזה הם נשנים חיובית. כל מחלקה ארגודית סופית היא מחלקה של מצבים נשנים חיובית.

נושא: תנאי האיזון המפורט

בכל וקטור סטציונרי מתקיים עבור כל מצב i : $\pi_i = \sum_j \pi_j P_{j,i}$.

הגדרת תנאי האיזון המפורט

תנאי האיזון המפורט אומר יותר מזה. הוא אומר שעבור כל i, j מתקיים $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$.

נראה שעבור כל וקטור הסתברויות שעליו מתקיים תנאי האיזון המפורט, מתקיים שהוא וקטור סטציונרי.

נימוק

אם עבור מצב i מסוים מתקיים עבור כל מצב j מתקיים $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$ אז אם נסכום את השוויונות על-פני ערכי j נקבל באגף שמאל $\sum_j \pi_i P_{i,j} = \pi_i$ (זאת מכיון שכל שורה מסתכמת ב 1 במטריצה סטוכסטית). באגף ימין נקבל $\sum_j \pi_j P_{j,i}$ ולכן $\pi_i = \sum_j \pi_j P_{j,i}$ ולכן זהו וקטור סטציונרי.

גרפים

נסתכל על משפחה של שרשרות מרקוב שהן גרפים שבהם כאשר נמצאים בצומת אז בוחרים באקראי בסיכוי שווה את אחד השכנים ועוברים אליו. יהי d_i הדרגה של צומת i בגרף. יהי $\sum d_i$ סכום הדרגות בגרף. נראה

שהוקטור שבו עבור כל j : $\pi_j = \frac{d_j}{\sum d_i}$ הוא וקטור סטציונרי. ראשית ברור שסכום רכיביו הוא 1. נראה שוקטור זה מקיים את תנאי האיזון המפורט. נניח שצמתים j,k הם צמתים שכנים, אז מתקיים $\frac{d_k}{\sum d_i}\frac{1}{d_k} = \frac{d_j}{\sum d_i}\frac{1}{d_j}$. לכן זהו ווקטור סטציונרי. אם הגרף הוא קשיר אז הוא מהווה שרשרת בלתי פריקה ויש גם וקטור סטציונרי יחיד.

<u>תרגיל</u>
פרש מבצע הילוך מקרי על לוח השחמט. הוא מתחיל בפינה. מהי תוחלת מספר הצעדים עד שהוא יחזור לאותה פינה ?

<u>פתרון</u>
בלוח השחמט הפרש יכול להגיע באיזשהו שלב מכל משבצת לכל משבצת. המסע של הפרש הוא מסע על גרף קשיר. הדרגה של המשבצת הפינתית היא 2. אם סכום הדרגות הוא D אז ההסתברות הסטציונרית של משבצת פינתית היא $\frac{2}{D}$ ותוחלת הזמן עד חזרה לפינה היא $\frac{D}{2}$.

<u>דוגמא</u> לשרשרת שבה יש וקטור סטציונרי שלו מקיים את תנא האיזון המפורט
שרשרת בעלת שלושה מצבים ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש וקטור סטציונרי יחיד $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ אך למשל מהמצב הראשון יש מעבר למצב השני בעוד שמהמצב השני אין מעבר למצב הראשון. לכן אין שימור של מאזן בין שנהם ($\frac{1}{3}\cdot 1 \neq \frac{1}{3}\cdot 0$).

<u>סוגיה</u>
נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $\{0,1,2,\cdots\}$ ובעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & & & \\ q & 0 & p & 0 & \cdot & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdot & & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

עבור כל i ניתן לעבור ממצב בעל אינדקס לא יותר גבוה מ i למצב בעל אינדקס גבוה מ i רק ממצב i.
בכיוון ההפוך המעבר אפשרי רק דרך מצב $i+1$. שכיחות המעברים בשני הכיווני שווה. לכן אם קיים וקטור הסתברויות סטציונרי אז מתקיים עבור כל $i \geq 1$: $\pi_i p = \pi_{i+1} q$. מהיחסים האלה ומכך שרכיבי כל וקטור סטציונרי מסתכמים ב 1, אפשר לקבל את ההסתברויות הסטציונריות.

מתקיים $\pi_1 = \pi_0 / q$ ועבור כל $i \geq 1$: $= \pi_0 \dfrac{p^{i-1}}{q^i}$ $\pi_i = \pi_1 \left(\dfrac{p}{q}\right)^{i-1}$. מכיון ש $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$, אז מתקיים

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p^{i-1}}{q^{i-1}}/q} = \frac{1}{1+\frac{1}{1-p/q}/q} = \frac{1}{1+\frac{1}{q-p}} = \frac{q-p}{q-p+1} = \frac{q-p}{2q}$$

מפתרון זה מסתבר שקיים וקטור הסתברויות סטציונריות רק אם $q > p$.

וקטור הסתברויות סטציונריות קיים רק אם $q > p$.

ממצב 0 בהכרח עוברים למצב 1.

אם $q < p$, אז כמו בהילוך מקרי לא סימטרי, לא חוזרים בודאות ממצב 1 למצב 0 ולכן מצב 0 הוא חולף.

אם $q = p$, אז כמו בהילוך מקרי סימטרי, תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למצב 0 היא אין סוף ולכן גם תוחלת זמן החזרה ממצב 0 לעצמו היא אין סוף ולכן מצב 0 הוא נשנה אפס.

הסתברויות גבוליות בשרשרות סופיות

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

חשבו את $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(n)}$.

תשובה

ממצב 1 בהסתברות 1 נגיע למחלקה $\{2,3\}$. מחלקה זו היא לא מחזורית וקיים בה וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(n)} = \frac{2}{3}$.

דוגמא

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

1	0	0	0	0
0.3	0.2	0.1	0	0.4
0.1	0.2	0.3	0.1	0.3
0	0	0	0	1
0	0	0	0.5	0.5

שאלות

א. האם קיים $\lim_{n\to\infty} P_{2,4}^{(n)}$ ואם כן למה הוא שווה ?

ב. חשבו את תוחלת זמן ההגעה מכל מצב חולף למחלקה של מצבים נשנים.

תשובות

א.

אם מגיעים למחלקה הבלתי פריקה ולא מחזורית $\{4,5\}$ אז במקרה זה ההסתברות הגבולית של מצב 4 היא $\frac{1}{3}$

שזאת ההסתברות הסטציונרית שלו במחלקה.

צריך לחשב את ההסתברות להגיע ממצב 2 למחלקה $\{4,5\}$. נקרא להסתברות זו a_2 ונקרא להסתברות להגיע ממצב 3 למחלקה $\{4,5\}$ - a_3 . מתקיים:

$$\begin{cases} a_2 = 0.3\cdot 0 + 0.2a_2 + 0.1a_3 + 0\cdot 1 + 0.4\cdot 1 \\ a_3 = 0.1\cdot 0 + 0.2a_2 + 0.3a_3 + 0.1\cdot 1 + 0.3\cdot 1 \end{cases}$$

<u>הסבר</u> לחלק מגורמים:

ממצב 2 עוברים בהסתברות 0.3 למצב 1 ואז לעולם כבר לא נגיע למחלקה $\{4,5\}$, בהסתברות 0.2 נשארים בו וההסתברות נשארת אותה הסתברות ולמשל בהסתברות 0.4 מגיעים כבר למחלקה $\{4,5\}$.

הפתרון המבוקש הוא $a_2\cdot\frac{1}{3}$ כאשר כאמור $\frac{1}{3}$ היא ההסתברות הסטציונרית של מצב 4 במחלקתו הלא מחזורית.

<u>ב</u>.

יהיו e_i - תוחלת זמן ההגעה ממצב i למחלקה של מצבים נשנים.

$$\begin{cases} e_2 = 1 + 0.3\cdot 0 + 0.2e_2 + 0.1e_3 + 0\cdot 0 + 0.4\cdot 0 \\ e_3 = 1 + 0.1\cdot 0 + 0.2e_2 + 0.3e_3 + 0.1\cdot 0 + 0.3\cdot 0 \end{cases}$$

<u>הסבר</u>

כשמתחילים במצב חולף, מבצעים בכל מקרה צעד אחד ואז מגיעים למצב אחר שלגביו יש איזשהי תוחלת למספר הצעדים עד הגעה למחלקה של מצבים נשנים. לגבי מצבים נשנים בהם תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למחלקה של נשנים היא 0.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

0.2	0.3	0.1	0.3	0.1
0.1	0.2	0.3	0	0.4
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
0	0	0.3	0.7	0

מצאו $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)}$ ואת $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n+1)}$.

<u>פתרון</u>

מהמצבים החולפים 1 ו 2 ברור שנגיע למחלקה הלא פריקה היחידה $\{3,4,5\}$. כדי שתהיה אפשרות להיות במצב 3 בצעדים הזוגיים, צריך להגיע למצבים 3 או 4 בצעד זוגי או להגיע למצב 5 בצעד אי זוגי. אם זה כבר יתרחש, אז ההסתברות הגבולית של מצב 3 תהיה 0.3 ושל מצב 4 תהיה 0.7 .

יהי a_1 ההסתברות להגיע למצבים 3 או 4 במספר זוגי של צעדים או להגיע למצב 5 במספר אי זוגי של צעדים , זאת כאשר מתחילים במצב 1.

יהי a_2 ההסתברות להגיע למצבים 3 או 4 במספר זוגי של צעדים או להגיע למצב 5 במספר אי זוגי של צעדים , זאת כאשר מתחילים במצב 2.
מתקיים:

$$\begin{cases} a_1 = 0.2(1-a_1) + 0.3(1-a_2) + 0.1\cdot 0 + 0.3\cdot 0 + 0.1\cdot 1 \\ a_2 = 0.1(1-a_1) + 0.2(1-a_2) + 0.3\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0.4\cdot 1 \end{cases}$$

(אם למשל חוזרים מהמצב לעצמו ורצינו מספר זוגי של צעדים עד הגעה לקבוצה אחת או מספר אי זוגי להגעה לקבוצה אחרת, אז כעת אנחנו צריכים את בדיוק ההפך.)

מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)} = a_1 \cdot 0.3$, $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n+1)} = (1-a_1)0.3$.

<u>הערה</u>

בפתרון הזה נצלנו את העובדה שידוע לאיזה מחלקה של מצבים נשנים מגיעים. כך ההסתברויות להיות במצב 5 לאחר מספר זוגי או אי זוגי של צעדים מסתכמות ב 1. אילו אפשר היה גם להגיע למחלקה אחרת, אז הן לא היו מסתכמות ב 1.
פתרון למקרה כזה ניתן <u>בדרך הנוספת</u> הבאה.

<u>דרך נוספת</u>

ניתן להעלות את מטריצת המעבר בריבוע. המטריצה המתקבלת היא מטריצת המעבר של התהליך בקפיצות של שני שלבים. זו מטריצת מעבר של שרשרת שכל מצביה הם לא מחזוריים. ההסתברויות הגבוליות שהתהליך המקורי יבקר במצב מסוים בשלב שהוא קבוע גדול זוגי שווה להסתברות שהתהליך החדש יבקר במצב לאחר מספר גדול של צעדים שאינו דוקא זוגי. את אלה נוכל למצוא באותה דרך שבה השתמשנו בתקציר זה לגבי שרשרת שמצביה הנשנים הם לא מחזוריים.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את $\lim_{n\to\infty} P_{1,4}^{(2n)}$:

נעלה את מטריצת המעבר ברבוע ונקבל מטריצה

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0.02 & 0.24 & 0.35 & 0.36 \\ 0.04 & 0.03 & 0.26 & 0.38 & 0.29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת צריך לחשב את סיכויי ההגעה למצב 4 בשרשרת שזו מטריצת המעבר שלה.

יהי a_1 סיכוי ההגעה למצב 4 כאשר מתחילים במצב 1.

יהי a_2 סיכוי ההגעה למצב 4 כאשר מתחילים במצב 2.

מתקיים

$$\begin{cases} a_1 = 0.03a_1 + 0.02a_2 + 0.24\cdot 0 + 0.35\cdot 1 + 0.36\cdot 0 \\ a_2 = 0.04a_1 + 0.03a_2 + 0.26\cdot 0 + 0.38\cdot 1 + 0.29\cdot 0 \end{cases}$$

ואיך מזה נקבל את ההסתברויות הגבוליות בזמנים האי זוגיים ?

<u>תשובה</u>: אם נכפיל את וקטור ההסתברויות הגבוליות של הזמנים הזוגיים במטריצת המעבר אז נקבל את ההסתברויות הגבוליות בזמנים האי זוגיים. ניתן אלטרנטיבית למצוא את וקטור ההסתברויות של השלב הבא אחרי השלב ההתחלתי, ולהכפיל אותו במטריצה הגבולית של הזמנים הזוגיים.

<u>שאלה</u>

ומה אפשר לעשות אם המחזור היה לאו דוקא 2 ?

<u>תשובה</u>

נשתמש באותה דרך כללית. נעלה את המטריצה המקורית בחזקת d שהוא כאן מספר שהמחזור של כל מצבי השרשרת מחלק אותו. כך נקבל מטריצה לא מחזורית. במטריצה זו שוב נמצא את ההסתברויות המבוקשות לפי אותה גישה שבה השתמשנו בקובץ זה לגבי שרשרות לא מחזוריות.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב בלתי פריקה בת 5 מצבים ומחזור 3.

האם קיים מצב בעל הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$?

<u>תשובה</u>: כן

ניתן לחלק את מצבי השרשרת ל 3 קבוצות זרות כך שבכל שלב עוברים מקבוצה לקבוצה ושכיחות הביקורים בכל קבוצה היא $\frac{1}{3}$. מכיון שאין שלושה מספרים שלמים הגדולים מ 1 שמסתכמים ב 5, אז בהכרח בלפחות אחת משלושת הקבוצות יש בדיוק מצב אחד. במצב זה נבקר בדיוק בכל צעד שלישי.

למצב זה יש הסתברות סטציונרית $\frac{1}{3}$.

<u>סוגיה</u>

נתונה שרשרת מרקוב על מרחב המצבים שהם השלמים האי-שליליים. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 1$ $P_{0,i} = a_i$ ו $P_{i,i-1} = 1$.

מצב 0 הוא עבור כל סדרה, מצב נשנה, זאת כי מכל מצב בהכרח חוזרים אליו.

השרשרת היא אי פריקה אם יש אינסוף ערכי i שעבורם $a_i > 0$ כי אז ניתן להגיע לכל מצב ממצב 0 שאליו מגיעים בכל מקרה מכל מצב.

אם השרשרת אי פריקה אז לכל המצבים יש את אותו מחזור.

אם תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית אז מצב 0 הוא נשנה חיובי.

אם מצב 0 הוא נשנה חיובי אז בכל מקרה קיימת התפלגות סטציונרית.

אם קיימת התפלגות סטציונרית והשרשרת לא מחזורית, אז קיימת הסתברות גבולית.

אם מצבי השרשרת אינם נשנים חיובית, אז בכל מקרה קיימת הסתברות גבולית אפס לכל מצבי השרשרת. אבל אין התפלגות גבולית. התפלגות סטציונרית קיימת רק אם השרשרת נשנית חיובית והתפלגות גבולית קיימת רק אם יש התפלגות סטציונרית והשרשרת לא מחזורית.

דוגמא למקרה שכל המצבים הם נשנים אפס: $P_{0,n} = \frac{c}{n^2}$ עבור כל $n \geq 1$ ועבור c מתאים.

כאן תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא אינסוף (אם מגיעים ממצב 0 למצב n אז יש צעד אחד הלוך ו n צעדים חזור ובסך הכל $n+1$ צעדים עד חזרה למצב 0 ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2}(n+1) = \infty$). לכן ההסתברות הגבולית של מצב 0 היא 0. מכיון שנשנות אפס היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים הם נשנים אפס וההסתברות הגבולית של כל מצב היא 0 .

דוגמא למקרה שכל המצבים הם נשנים חיובית: $P_{0,n} = \frac{c}{n^3}$ עבור כל $n \geq 1$ ועבור c מתאים.

כאן תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^3}(n+1) < \infty$). לכן מצב 0 הוא נשנה חיובי. מכיון שלמשל ניתן לחזור למצב 0 בשני צעדים או שלושה צעדים אז מצב 0 הוא לא מחזורי. מכיון שנשנות חיובית ואי מחזוריות הן תכונות מחלקתיות, אז כל המצבים הם נשנים חיובית ולא מחזוריים. לכן לכל מצב יש הסתברות גבולית חיובית ממש.

דוגמא לכך שלא קיימות הסתברויות גבוליות למצבים השונים: $P_{0,n} = \frac{c}{n^3}$ עבור כל $n \geq 1$ אי זוגי ו $P_{0,n} = 0$ עבור כל $n \geq 0$ זוגי. כאן המצבים הם נשנים חיובית אך מחזוריים (ניתן לחזור ממצב לעצמו רק במספר זוגי של צעדים).

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תהליכי הסתעפות</u>

שלומי

<u>נושא</u> תהליכי הסתעפות

מדובר בשרשרת מרקוב שבה בהינתן $X_n = m$ אז X_{n+1} מתפלג כסכום של m משתנים בלתי תלויים שווי התפלגות שהיא התפלגות קבועה מסוימת. ניתן לראות את התהליך כתהליך התפתחות של שושלת שבה X_n הוא מספר הפרטים בדור ה-n.

נעשה שימוש בפונקציה היוצרת של התפלגות מספר הצאצאים של פרט.

<u>דוגמא</u>

אם מספר הצאצאים של פרט מתפלג באופן הבא $P(Z=0)=0.5$, $P(Z=1)=0.2$, $P(Z=3)=0.3$ אז הפונקציה היוצרת היא $0.5+0.2t+0.3t^3$.

<u>טענה</u>

בהינתן שמספר הפרטים בדור ה-0 הוא 1 אז הפונקציה היוצרת של מספר הפרטים בדור ה-n מתקבלת על-ידי הרכבה n פעמים של הפונקציה היוצרת של מספר הצאצאים של פרט: $g(g(g(\ldots g)))$.

<u>נימוק</u>

הפונקציה היוצרת של סכום משתנים בלתי תלויים שווה למכפלת הפונקציות היוצרות של המשתנים. כאן המשתנים הם שווי התפלגות ולכן שווי פונקציה יוצרת. $g_{X_n} = \sum P(X_{n-1}=k)g^k$, כאשר הכוונה היא להעלאה בחזקת k.

זה שווה ל $g_{X_{n-1}}(g)$ ובאינדוקציה נקבל את הטענה לגבי הרכבה n פעמים.

<u>שימוש בטענה</u>

נראה שאם מספר הצאצאים מתפלג $G(p)$ אז מספר הצאצאים בדור השני מתפלג גם גיאומטרית עם פרמטר אחר.

הפונקציה היוצרת היא: $\frac{pt}{1-qt} = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}t^k$. נבצע הרכבה $g(g(t))$ ונקבל

$$\frac{p\frac{pt}{1-qt}}{1-q\frac{pt}{1-qt}} = \cdots = \frac{p^2t}{1-(1-p^2)t}$$

ולכן מספר הפרטים בדור השני מתפלג $G(p^2)$.

<u>שימוש נוסף</u>

מציאת התפלגות מספר הפרטים בדור מסוים. נניח ש $(X_0=1)$ ו $P(Z=0)=P(Z=1)=P(Z=2)=\frac{1}{3}$

מצאו $P(X_2=2)$.

$$g(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2$$

$$g(g(t))=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2\right)^2$$

וצריך למצוא את המקדם של t^2 בפונקציה היוצרת.

נפתור גם בדרך אלטרנטיבית:

$$P(X_2=2)=P(X_1=0)\cdot 0+P(X_1=1)\cdot\frac{1}{3}+P(X_1=2)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\cdots$$

כללית לגבי פונקציה יוצרת מתקיים ש $g(0)$ הוא האיבר החופשי.

איך נחשוף איברים נוספים:

אם נגזור k פעמים אז כל החזקות הנמוכות מ k יתאפסו. אם נציב 0 אז כל החזקות הגבוהות מ k יתאפסו. מה שישאר זה $k!$ כפול המקדם של t^k. לכן על-ידי חלוקה ב $k!$ נקבל את המקדם של t^k.

המצב 0 הוא מצב סופג כי אם נגיע אליו אז לא יהיו בכל מקרה עוד צאצאים.

בהנחה שבהתפלגות מספר הצאצאים של פרט יש הסתברות חיובית לקבלת אפס צאצאים, אז מכל המצבים האחרים יש מסלול למצב 0 שממנו אין דרך חזרה אליהם. הם לא ארגודים ולכן הם חולפים.

זה לא אומר שבודאות נגיע למצב 0.

<u>הכחדות</u> היא הגעה למצב 0.

יהי t שווה לסיכויי ההכחדות כאשר מתחילים עם פרט אחד. מתקיימת המשוואה $t=g(t)$.

<u>הסבר</u>

אם בדור הראשון יתקבלו k פרטים אז סיכויי ההכחדות יהיו כבר t^k כי יהיה מדובר ב k שושלות בלתי תלויות שכל אחת מהן צריכה להכחד.

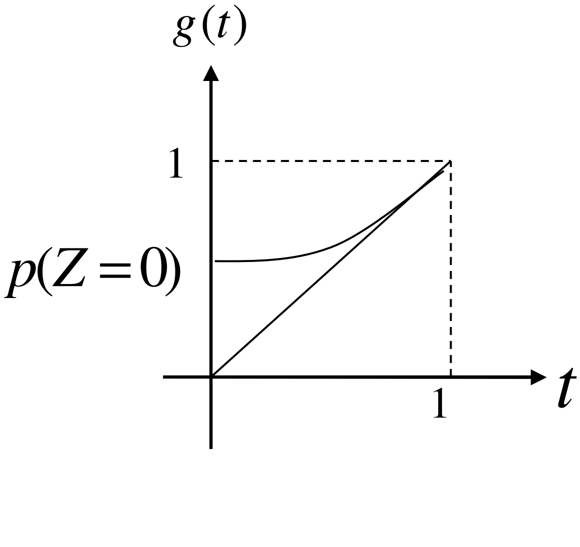
<u>מציאת ההסתברות להכחדות</u>

בטור החזקות $g(t)$ סכום המקדמים הוא 1 כי מדובר בסכום ההסתברויות לקבלת מספר צאצאים מסוים.

לכן מתקיים תמיד $g(1)=1$. ננסה לבדוק מתי יש פתרונות נוספים. אם יש פתרונות נוספים אז ננסה לקבוע מי מהם משקף את סיכויי ההכחדות.

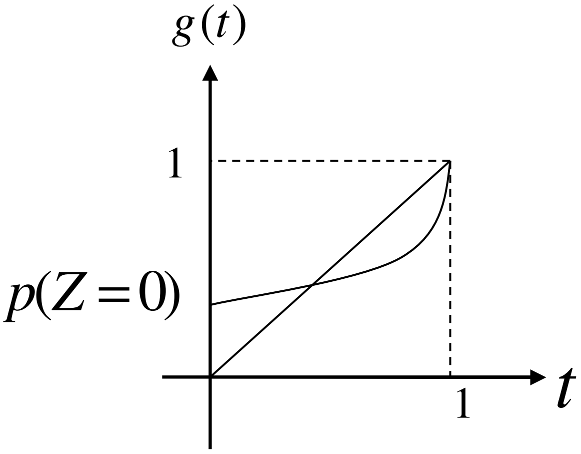
אם נגזור את הטור ונציב 1 אז בנקודה 1 יתקבל ש $g'(1)=\mu$, כאשר μ היא תוחלת מספר הצאצאים של פרט.

הנגזרת היא מונוטונית עולה, לכן אם $\mu<1$ אז עבור כל $t<1$ הנגזרת קטנה מ 1. מכיון שאנו מניחים שיש הסתברות חיובית לקבלת אפס צאצאים אז $g(0)>0$. מכאן נקבל ש $g(t)>t$ עבור כל $t<1$. לכן הפתרון היחיד למשוואה הוא הפתרון הטריוויאלי $t=1$.



אם $\mu=1$ והתהליך הוא לא מנוון זאת אומרת ש $P(Z=1)\neq 1$ אז הנגזרת של $g(t)$ שווה ל 1 עבור $t=1$ ומכיון שהיא מונוטונית עולה אז היא קטנה מ 1 עבור $t<1$ ולכן הפתרון היחיד הוא שוב $t=1$ ויש הכחדות בהסתברות 1.

אם $\mu > 1$ אז הנגזרת בנקודה 1 היא גדולה מ 1 ויש פתרון נוסף.



השאלה היא מיהו הפתרון שמשקף את סיכויי ההכחדות. נראה שזהו הפתרון הקטן מ 1.
יהי a הפתרון שקטן מ 1. מתקיים $g(a)=a$ וגם לגבי כל הרכבה n-ית מתקיים $g^{(n)}(a)=a$. מתקיים $P(X_n=0)=g^{(n)}(0)$. אבל עבור כל n מתקיים $g^{(n)}(0) \le g^{(n)}(a)=a$. לכן גם $\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(0) \le a$ ונקבל שהסתברות ההכחדות היא הפתרון הקטן בקטע $0 < t \le 1$.

<u>שאלה</u>

נתון תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים מקיימת:

$$P(Z=0)=P(Z=1)=P(Z=2)=\frac{1}{3}$$

מהי ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_0=1)$?

<u>תשובה</u>

מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של פרט שווה ל 1 והתפלגות מספר הצאצאים היא לא מנוונת אז ההכחדות היא ודאית.

<u>שאלה</u>

נתון תהליך הסתעפות שבו התפלגות מספר הצאצאים מקיימת:

$$P(Z=0)=P(Z=1)=0.25 \quad , \quad P(Z=2)=0.5$$

מהי ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_0=1)$?

<u>תשובה</u>

כאן תוחלת מספר הצאצאים היא גדולה מ 1. לכן מבוקש פתרון שהוא קטן מ 1 למשוואה

$$t = 0.25 + 0.25t + 0.5t^2$$

מתקבל פתרון יחיד נוסף שהוא $t=0.5$. לכן זאת היא ההסתברות להכחדות.

<u>שאלה</u>

נניח שבתהליך זה $(X_0=3)$. מהי ההסתברות להכחדות ?

ואם $(X_2=3)$, מהי ההסתברות להכחדות ?

<u>תשובה</u>

בהינתן $(X_0=3)$ הסתברות ההכחדות היא t^3 כי שלוש שושלות צריכות להכחד ואין תלות בינהן.

בגלל ההומוגניות בזמן זאת גם ההסתברות להכחדות בהינתן $(X_2 = 3)$.

שאלה

בתהליך זה, מהו $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2)$?

תשובה

מצב 2 הוא לא מצב ארגודי לכן יש לו הסתברות סטציונרית 0 לכן הגבול הוא 0.

שאלה

מהו $\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} > X_n)$?

תשובה

הסתברות זו שווה להסתברות של המשלים להכחדות. אם תהיה הכחדות אז לאחריה יתקיים תמיד $X_{n+1} = X_n = 0$. אם לא תהיה הכחדות אז בגלל שכל המצבים הם חולפים אז נגיע למספר גדול של פרטים. מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט גדולה מ 1 אז לפי למשל החוק החלש של המספרים הגדולים, ההסתברות שמספר הצאצאים יעלה על מספר הפרטים שבאותו דור שואפת ל 1 כאשר $n \to \infty$.

טענה

אם תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא μ ומתקיים $X_0 = 1$ אז תוחלת מספר הפרטים בדור ה-n היא μ^n.

הוכחה

באינדוקציה $E(X_n) = E(E(X_n \mid X_{n-1})) = E(\mu X_{n-1}) = \cdots$

הערה

מטענה זו ומאי שיוויון מרקוב יכולנו לקבל את התוצאה שכאשר $\mu < 1$ יש הכחדות ודאית.
אבל קבלנו את טענה זו בדרך אחרת.

בהוכחות של שתי הטענות הבאות נשתמש בנוסחאת פרוק השונות שאומרת שלגבי זוג משתנים מקריים X, Y מתקיים

$$Var(Y) = Var(E(Y \mid X)) + E(Var(Y \mid X))$$

טענה

בתהליך הסתעפות שבו תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $\mu = 1$ ושונות מספר הצאצאים של פרט היא σ^2 אז כאשר מתקיים $(X_0 = 1)$ אז מתקיים $Var(X_n) = n\sigma^2$.

הוכחה

נוכיח את הטענה באינדוקציה

עבור $n = 1$ מתקיים $Var(X_1) = \sigma^2$.

עבור $n \ge 2$ מתקיים

$$Var(X_n) = Var(E(X_n \mid X_{n-1})) + E(Var(X_n \mid X_{n-1})) = Var(\mu X_{n-1}) + E(\sigma^2 X_{n-1}) =$$
$$= Var(X_{n-1}) + \sigma^2 = (n-1)\sigma^2 + \sigma^2 = n\sigma^2$$

טענה

בתהליך הסתעפות שבו תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא $\mu \neq 1$ ושונות מספר הצאצאים של פרט היא σ^2 אז כאשר מתקיים $(X_0 = 1)$ אז מתקיים $Var(X_n) = \sigma^2 \frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1}$.

גם את הטענה הזאת נוכיח באינדוקציה.

עבור $n = 1$ מתקיים $Var(X_1) = \sigma^2 \frac{\mu^{2-1} - \mu^{1-1}}{\mu - 1} = \sigma^2$.

עבור $n \geq 2$ מתקיים

$$Var(X_n) = Var(E(X_n \mid X_{n-1})) + E(Var(X_n \mid X_{n-1})) = Var(\mu X_{n-1}) + E(\sigma^2 X_{n-1}) =$$

$$= \mu^2 Var(X_{n-1}) + \sigma^2 E(X_{n-1}) = \mu^2 \sigma^2 \frac{\mu^{2n-3} - \mu^{n-2}}{\mu - 1} + \sigma^2 \mu^{n-1} = \sigma^2 \frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1}$$

<u>שאלה</u>

כאשר $\mu > 1$ ו $\sigma^2 > 0$, למה ישאף $Var(X_n)$ כאשר $n \to \infty$?

<u>תשובה</u>

מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sigma^2 \frac{\mu^{2n-1} - \mu^{n-1}}{\mu - 1} = \infty$.

נתן גם הסבר לתוצאה זו. כאשר התהליך לא מנוון ו $\mu > 1$ אז בהסתברות חיובית יש הכחדות ובהסתברות חיובית גודל האוכלוסיה שואף לאינסוף. מכאן נובע הפיזור הגדול בגדלי האוכלוסיה.

<u>שאלה</u>

נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם שני תהליכי הסתעפות בלתי תלויים ושווי התפלגות בהם מספר הצאצאים Z של פרט בודד מפולג לפי

$P(Z = 0) = 0.001 \quad P(Z = 1) = 0.998 \quad P(Z = 100) = 0.001$.

<u>א</u>. בהינתן $X_0 = 1$, מצאו בקירוב את ההסתברות להיכחדות של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$.

<u>ב</u>. נניח ש $X_0 = Y_0 = 3$, מהי בקירוב ההסתברות ששתי השושלות יכחדו לראשונה בדיוק באותו דור ?

<u>תשובה</u>

<u>א</u>. תוחלת מספר הצאצאים של פרט היא גדולה מ 1, לכן יש סיכוי קטן מ 1 להכחדות.
מתחילים עם פרט בודד. נסתכל על הדור הראשון שבו יהיו מספר פרטים שונה מ 1. אם זה יהיה 0 פרטים אז יש הכחדות. אם בדור זה יהיו 100 צאצאים אז יהיו לנו בהמשך 100 שושלות בלתי תלויות שלגבי כל אחת מהן יש סיכוי לא קטן שהיא לא תכחד. במקרה זה ההסתברות להכחדות של כל 100 השושלות היא בקירוב 0 ובסך הכל ההסתברות להכחדות היא בקירוב 0.5 .
אפשר גם להבחין בכך שיש פתרון למשוואה $g(t) = t$ בין 0.5 ללמשל 0.51 .

$$g(0.5) = 0.001 + 0.998 \cdot 0.5 + 0.001 \cdot 0.5^{100} > 0.5$$

ו $g(0.51) = 0.001 + 0.998 \cdot 0.51 + 0.001 \cdot 0.51^{100} < 0.51$.

לכן בקטע שבין 0.5 ל 0.51 יש נקודה t שבה $g(t) = t$. ניתן היה לבחור קטע קצר יותר.

<u>ב</u>. בכל דור מסוים ההסתברות ששושלת Y תכחד היא קטנה מאוד. לכן ההסתברות ששושלת Y תכחד דוקא בדור ששושלת X תכחד היא קטנה מאוד.
נראה שההסתברות אינה גדולה מ 0.001 .
כדי ששתי השושלות יכחדו באותו דור, הן צריכות שתיהן לא להכחד עד אותו דור ואז כאשר אחת נכחדת צריכה גם השניה להכחד. אבל השניה תכחד בדור מסוים בסיכוי שלא עולה על 0.001 שזאת

ההסתברות שלפרט אחד יהיו אפס צאצאים.
ניתן לקבל אף חסמים טובים יותר אבל החסם הזה הוא מספק.
<u>הערה</u>: חסם פחות טוב הוא $0.51^3 \cdot 0.51^3$ שזהו חסם עליון להכחדות של כולם ולא משנה באיזה דור.

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 9</u>

שלומי

<u>נושא תורים</u>

נתונה מערכת תור בה יש שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. אם בתחילת תקופה נמצא לפחות לקוח אחד בתחנה אז השרת משרת לקוח. התפלגות מספר המגיעים לתחנה בתקופה מסוימת מקיימת עבור כל שלם $k \ge 0 \;\; : \;\; P(Z = k) = a_k$. נניח שהתהליך איננו דטרמיניסטי זאת אומרת שהתפלגות מספר הלקוחות המגיעים בתקופה אינה מנוונת.

<u>טענה</u>

מצב 0 הוא נשנה אם תוחלת מספר הלקוחות המגיעים בתקופה אינה גדולה מ 1.

<u>נימוק</u>

נעשה רדוקציה לתהליך הסתעפות כאשר מספר הצאצאים הוא מספר הלקוחות המגיעים בזמן שירות של לקוח. הדור ה- n יהיה דור הפרטים שיגיעו בזמן שבני הדור ה- $n-1$ ישורת. כך הדור הראשון הוא הדור שמגיע כאשר עדיין בתחנה לא היה כל שירות בלקוח. הדור השני הוא הדור שמגיע בזמן שבני דור זה שורתו. נסתכל על הגעה למצב 0 (של 0 צרכנים במערכת) כעל הכחדות.

כעת נשאלת השאלה מתי השרשרת נשנית חיובית ומתי היא נשנית אפס.

מטריצת המעבר היא

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \end{matrix}$$

לכן לא משנה לגבי ההמשך אם מתחילים במצב 0 או במצב 1. לכן $E_{0,0} = E_{1,0}$ כאשר $E_{i,j}$ היא תוחלת זמן ההגעה הראשונה ממצב i למצב j .

נשים לב ש

$$E_{k,0} = E_{k,k-1} + E_{k-1,k-2} + \cdots + E_{1,0}$$

כל הגורמים באגף ימין הם שווים לכן $E_{k,0} = kE_{1,0}$.

מתקיים

$$E_{0,0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(Z = k) E_{k,0} \quad \text{או} \quad E_{0,0} = 1 + \sum P(Z = k) k E_{0,0}$$

לכן כאשר μ היא תוחלת מספר הלקוחות המגיעים ביחידת זמן אז $E_{0,0} = 1 + \mu E_{0,0}$ ומתקיים $E_{0,0} = \dfrac{1}{1-\mu}$. לכן תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא סופית אם ורק אם $\mu < 1$. במקרה זה יש לנו נוסחא לחישוב ההסתברות הסטציונרית של מצב 0 שהיא $\pi_0 = 1 - \mu$. זו תוצאה אינטואיטיבית כי בזמן t ארוך נצפה שיגיעו לתחנה μt לקוחות. אם הוא מתגבר על זרם הלקוחות אז נצפה שהוא ישרת לקוחות בפרופורצית זמן μ .

ניתן לשלב דרכים לחישוב הסתברויות סטציונריות. לאחר שידוע π_0, ניתן לחלץ את π_1 כי רק ממצב 1 ניתן להגיע ישירות למצב 0. כך הלאה ניתן לחשב הסתברויות סטציונריות של מצבים.

<u>סוגיה</u>

מבצעים סדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות של קוביה. יהי S_n הסכום המצטבר של ההטלות. מהי בקירוב ההסתברות ש S_n יקבל באיזשהו שלב את הערך $1000+i$ עבור $0 \le i \le 5$ אך לא יקבל בשום שלב שום ערך $1000+j$ עבור j שהוא מספר אי שלילי שקטן מ i.

<u>פתרון</u>

נגדיר מצב בשישיה כ i הראשון באותה שישיה שבו נבקר. כל המידע לגבי שישיה נמצא בשישיה הקודמת לה שחופפת לה ב 5 מתוך 6 המקומות. מטריצת המעבר של השרשרת היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם למשל בשישיה שמתחילה ב 100 הראשון שבו מבקרים הוא 102 אז ברור ש 102 הוא גם הראשון שבו מבקרים בשישיה שמתחילה ב 101. בשישיה שמתחילה ב 100 הוא המספר השלישי ובשישיה שמתחילה ב 101 הוא השני. כך ממצב 3 בהכרח עוברים למצב 2. אם בשישיה שמתחילה ב 100 הראשון שבו מבקרים הוא 100 אז לא יודע מי הוא הראשון שבו מבקרים בשישיה שמתחילה ב 101. במקרה זה הכל תלוי בתוצאת הקוביה המוטלת כאשר מבקרים ב 100 . כך מהמצב הראשון שבשרשרת אפשר לעבור לכל אחד מהמצבים האחרים בסיכוי $\frac{1}{6}$.

השרשרת היא בלתי פריקה: מכל מצב יש מסלול למצב הראשון וממנו יש מעבר ישיר לכל מצב אחר.
כאשר נמצאים במצב 1 אז על-ידי קבלת התוצאה 1 נשארים באותו מצב, לכן מצב 1 הוא לא מחזורי מכיון שאי מחזוריות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם לא מחזוריים. לכן יש הסתברויות גבוליות ששוות להסתברויות הסטציונריות.

נמצא וקטור הסתברויות סטציונריות :

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{6}\pi_0 + \pi_5 \\ \pi_5 = \frac{1}{6}\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

מקבלים $\pi_i = \frac{6-i}{6}\pi_0$ ו $\pi_0 = \frac{1}{3.5}$. זה סביר כי התוחלת של כל הטלה היא 3.5 .

<u>שאלה</u>

מהי בקירוב ההסתברות שנבקר ב 1002 וב 1004 אך לא נבקר ב 1003 , 1001 , 1000 ?

<u>פתרון</u>

עד שלב 1000 יש מספר גדול של מעברים, לכן ההסתברות קרובה להסתברות הסטציונרית.

הביקור הראשון החל ממקום 1000 צריך להיות ב 1002 ולכך יש הסתברות מקורבת של $\frac{1}{3.5}\cdot\frac{4}{6}$. משם צריך לעשות צעד של 2. בסך הכל ההסתברות המקורבת היא $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3.5}\cdot\frac{4}{6}$.

<u>שרשרות מרקוב בזמן רציף</u>

נתחיל את העיסוק בשרשרות בזמן רציף, בטיפול במקרה פרטי שלהם שהוא תהליך פואסון.

<u>נושא</u>: <u>תהליך פואסון</u>

תהליך פואסון $\{X(t)\}$ סופר את מספר ההתרחשויות עד נקודות זמן שונות $t \geq 0$.

$X(t)$ סופר את מספר ההתרחשויות בקטע הזמן $[0,t]$.

לתהליך פואסון יש פרמטר יחיד $\lambda > 0$ ומצביו הם כל השלמים האי שליליים.

כתהליך שמונה התרחשויות, באופן טבעי $X(t)$ לא יכול לרדת עם התקדמות הזמן.

מתקיימות ההנחות הבאות:

<u>א</u>. $X(0)=0$

(באופן טבעי מתחילים עם 0 התרחשויות בזמן 0).

<u>ב</u>. $P[X(t+h)=n \mid X(t)=n]=1-\lambda h+o(h)$

(כאשר $o(h)$ מסמן גודל המקיים שכאשר $h \to 0$, הוא שואף לאפס יותר מהר מכל ch עבור כל $c > 0$. זאת אומרת שכאשר $h \to 0$, הסיכוי שתהיה התרחשות ושיחול שינוי ב X מתנהג כמו λh).

<u>ג</u>. $P[X(t+h)=n+1 \mid X(t)=n]=\lambda h+o(h)$

<u>ד</u>. $P[X(t+h)>n+1 \mid X(t)=n]=o(h)$

(זאת אומרת שבפרק זמן $h \to 0$, ההסתברות שיהיו יותר מהתרחשות אחת שואפת לאפס יותר מהר מכל פונקציה לינארית של h).

<u>ה</u>. עבור כל סדרת זמנים $t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \cdots \leq t_n < s_n$ המשתנים המקריים $\{X(s_i)-X(t_i)\}$ הם ב"ת (זאת אומרת שיש אי תלות בין גדלי הקפיצות של התהליך בפרקי זמן זרים).

<u>משפט</u>

אם $\{X(t)\}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אז התפלגות $X(t)$ היא פואסונית עם פרמטר λt . כלומר:

$P[X(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$ עבור כל $k=0,1,2,\cdots$.

<u>הוכחה</u>

נחלק את הרווח $[0,t]$ ל n רווחים שווים. הקטע ה- i יהיה $\left[\frac{i-1}{n}t,\frac{it}{n}\right)$ עבור $i=1,\cdots,n$.

נראה שכאשר $n\to\infty$, ההסתברות שיהיה קטע שבו יהיה יותר מהתרחשות אחת באיזשהו קטע, שואפת לאפס.

יהיו E_i המאורעות שבקטע ה- i יהיה יותר מהתרחשות אחת.

יהי $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ (זהו המאורע שלפחות בקטע אחד תהיה יותר מהתרחשות אחת).

הסתברות איחוד אף פעם לא גדולה מסכום ההסתברויות ולכן נקבל:

$$P(E)\le\sum_{i=1}^{n}P(E_i)=\sum_{i=1}^{n}o\left(\frac{t}{n}\right)=no\left(\frac{t}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

כעת בהנחה שבאף קטע חלקי של הקטע $[0,t]$ לא יתרחשו יותר מאירוע אחד, נחשב את ההסתברות שבקטע $[0,t]$ יתרחשו k התרחשויות, זאת אומרת שבבדיוק k קטעים תתרחש התרחשות אחת.

$$\binom{n}{k}\left(\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k\left(1-\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k}=$$

$$=\left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)\left(\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k+o\left(\frac{1}{n^k}\right)\right)\left(\frac{\left(1-\lambda\frac{t}{n}-o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n}{\left(1-\lambda\frac{t}{n}-o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k}\right)$$

$$\to\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

הסברים:

בפיתוח בינומיאלי של $\left(\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k$ המחובר הראשון הוא $\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k$ וביתר k המחוברים האחרים $\frac{1}{n}$ מופיע בחזקה גבוהה מ k.

כאשר k הוא קבוע מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}=1$ ו $\lim_{n\to\infty}\left(1-\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^k=1$.

לאחר שהוכחנו שמספר האירועים עד זמן t מתפלג פואסונית, נוכל לשים לב לכך שאם τ_1 הוא זמן ההתרחשות הראשונה, אז $P[\tau_1>t]=P[X(t)=0]=e^{-\lambda t}$, כלומר τ_1 הוא משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר λ. זה מקרב אותנו לבניה של תהליך פואסון.

<u>בניית תהליך פואסון</u>

נספור את מספר ההתרחשויות החל מזמן 0 ועד נקודות הזמן השונות t, לאחר כל התרחשות ממתינים זמן המתפלג $\exp(\lambda)$ עד ההתרחשות הבאה. המשתנים המייצגים את משך הזמן בין התרחשות להתרחשות הם ב"ת.

נבדוק שמתקיימות כל חמשת ההנחות של תהליך פואסון:

<u>א</u>. עד זמן 0 אין אף התרחשות.

<u>ב</u>. לגבי משתנה $Y\sim\exp(\lambda)$ מתקיימת תכונת חוסר הזכרון:

$$P[Y>t+r\mid Y>t]=P[Y>r]=e^{-\lambda r}$$

לכן נקבל כאן $P[X(t+h)=n\mid X(t)=n]=e^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(h)$

(המעבר האחרון יכול להתקבל לפי פיתוח טיילור).

ד. כדי שבקטע באורך h יתרחשו לפחות שני אירועים, צריך שקודם כל יתרחש אירוע אחד לפחות. לכך יש הסתברות $1-e^{-\lambda h}$. אם מתרחש אירוע, אז הוא מתקיים בנקודה בין 0 ל h. לאחר התרחשות זו, צריך התרחשות נוספת במה שנותר מהקטע שהוא באורך של לא יותר מ h. לכן נקבל

$$P[X(t+h)>n+1 \mid X(t)=n] \le \left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(1-e^{-\lambda h}\right)=(\lambda h+o(h))^2 = o(h)$$

ג. מתקיים $P[X(t+h)\ge n+1 \mid X(t)=n]=1-e^{-\lambda h} = \lambda h+o(h)$

בצירוף עם התוצאה של ד' נקבל $P[X(t+h)=n+1 \mid X(t)=n]=\lambda h+o(h)$

(ההסתברות ללפחות אירוע אחד היא $\lambda h+o(h)$ וההסתברות ליותר מאירוע אחד היא $o(h)$, לכן ההסתברות לבדיוק אירוע אחד היא $\lambda h+o(h)$).

ה. התכונה נובעת מחוסר זכרון של התפלגות מעריכית.

<u>שאלה</u>

נמקו רק בהסתמך על ההנחות של תהליך פואסון והקשרים שלו להתפלגות מעריכית, מדוע סכום של שני משתנים מקריים מעריכיים אינו מתפלג מעריכית.

<u>הערה</u>: ניתן לחשב את צפיפות הסכום ואת התפלגותו בשיטות רגילות של חישוב התפלגות סכום. אבל, זה לא מה שאני רוצה שתעשו כאן.

<u>תשובה</u>

בתהליך פואסון, ההסתברות לאירוע בקטע זמן באורך h היא בסדר גודל של h. כך בהתפלגות מעריכית, ההסתברות לקבל ערך קטן מ h היא בסדר גודל של h. כדי שסכום שני משתנים יקבל ערך קטן מ h, צריך כל אחד מהם לקבל ערך קטן מ h. בגלל האי תלות יש לזה הסתברות שהיא בסדר גודל של h^2. זו לא הסתברות לקפיצה בתהליך פואסון ולכן היא לא מתאימה להתפלגות מעריכית.

<u>המודל הכללי של שרשרות בזמן רציף</u>

ראינו שבתהליך פואסון, בכל מצב טבעי ממתינים זמן המתפלג מעריכית (אותו פרמטר מעריכי לכל מצב) ואז עוברים לטבעי הבא. שרשרת מרקוב בזמן רציף היא מקרה כללי יותר. בכל מצב ממתינים זמן מעריכי ואז עוזבים אותו. אבל, לכל מצב יכול להיות פרמטר אחר להתפלגות המעריכית. כמו כן יכולים לעבור למצבים שונים.

כאשר נמצאים במצב i עוברים למצב j בקטע זמן באורך h בהסתברות $\lambda_{i,j}h+o(h)$ ונשארים במצב i לאחר קטע זמן באורך h בהסתברות $1-\sum_j\left(\lambda_{i,j}h+o(h)\right)$.

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 10</u>

שלומי

מתקיים $P_{i,j}(t+h)=\sum_k P_{i,k}(t)P_{k,j}(h)$

(לפי הסתברות שלמה כאשר משקללים את הסתברויות המעבר בזמן $t+h$ לפי זהות המצבים שבהם יכולים להמצא בזמן ביניים t).

לכן נקבל $P_{i,j}(t+h)=P_{i,j}(t)(1-\lambda_j h+o(h))+\sum_{k\neq j}P_{i,k}(t)(\lambda_{k,j}h+o(h))$

(אם בזמן t נמצאים במצב j , אז צריך לאחר פרק זמן באורך h שוב להיות בו, ואם בזמן t נמצאים במצב אחר, אז צריך לעבור למצב j).

אם נעביר אגפים ונחלק ב h, אז נקבל $\frac{P_{i,j}(t+h)-P_{i,j}(t)}{h}=-\lambda_j P_{i,j}(t)+\sum_k P_{i,k}(t)\lambda_{k,j}+o(h)$

אם נשאיף את h לאפס נקבל $P'_{i,j}(t)=-P_{i,j}(t)\lambda_j+\sum_{k\neq j}P_{i,k}\lambda_{k,j}$

המטריצה $\Lambda=(\lambda_{i,j})$ כאשר $\lambda_{i,i}=-\lambda_i$ נקראת היוצר האינפיניטיסימלי.

המטריצה $P(t)=(P_{i,j}(t))$ היא מטריצת המעבר בזמן t.

המטריצה $P'(t)=(P'_{i,j}(t))$ היא מטריצת הנגזרות של הסתברויות המעבר.

קבלנו מערכת משוואות דיפרנציאליות $P'(t)=P(t)\Lambda$.

בשלב מאוחר יותר נגיע לשימושים במערכות כאלה כדי לחשב הסתברויות מעבר בזמן קבוע.
אך בשלב זה נעבור לעיסוק בוקטורי הסתברויות סטציונריות שהם וקטורים של נקודות שבת.

נניח ש π הוא וקטור הסתברויות סטציונריות, אז צריך להתקיים עבור כל $h>0$: $\pi_j=\sum_i \pi_i P_{i,j}(h)$ כלומר

$$\pi_j=\left(\sum_{i\neq j}\pi_i\lambda_{i,j}h+o(h)\right)+\pi_j(1-\lambda_j h+o(h)).$$

נחלק ב h ונשאיף את h לאפס ונקבל $\sum_j \pi_i\lambda_{i,j}=0$, כלומר הוקטור הסטציונרי פותר את מערכת המשוואות $\pi\Lambda=0$.

<u>דוגמא</u> למציאת וקטור הסתברויות סטציונרי

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

מצאו וקטור הסתברויות סטציונרי.

מתקיים

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ (-2)\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 - 2\pi_2 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = 0 \end{cases}$$

ונקבל פתרון שהוא וקטור סטציונרי.
אינטואיציה: למעשה במצב שיווי משקל עוצמת הזרם שנכנס למצב שווה לעוצמת הזרם שיוצא מהמצב.
כך למשל בדוגמא זו מהמצב הראשון יוצאים בעוצמה 2 , נכנסים אליו בעצמה 1 מהמצב השני ונכנסים אליו בעוצמה 1 מהמצב השלישי.

דוגמא: תהליך פואסון עם קצב λ
ביוצר האינפיניטסימלי כאן $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$ ו $\Lambda_{i,i} = -\lambda$ עבור כל i. יתר האיברים הם אפס.
כאן אין פתרון שונה מוקטור האפס למערכת למציאת וקטור סטציונרי. לכן אין וקטור סטציונרי. זה מבטא את העובדה שכל המצבים הם חולפים.

ראינו שבתהליך פואסון, בכל מצב טבעי ממתינים זמן המתפלג מעריכית (אותו פרמטר מעריכי לכל מצב) ואז עוברים לטבעי הבא. שרשרת מרקוב בזמן רציף היא מקרה כללי יותר. בכל מצב ממתינים זמן מעריכי ואז עוזבים אותו. אבל, לכל מצב יכול להיות פרמטר אחר להתפלגות המעריכית. כמו כן יכולים לעבור למצבים שונים. לגבי כל מצב יש התפלגות של המצב הבא שאליו עוברים. כך יש מטריצת מעבר בזמני הקפיצות שמייצגת את הסתברויות המעבר למצבים השונים מכל מצב.
בתהליך בזמן בדיד יש יחידות זמן שבהן יכולים לעבור ממצב למצב. בתהליך בזמן רציף אין יחידות זמן קבועות. במצב נתון ממתינים זמן המתפלג מעריכית (עם פרמטר המאפיין את המצב) ואז עוברים למצב אחר, כאשר זהות המצב האחר נקבעת לפי שורה במטריצת המעבר של זמני הקפיצות.

לכל שרשרת מרקוב בזמן רציף קיימת מטריצה ריבועית של יוצר אינפיניטיסימלי שמתארת אותו. במטריצה זו באים לידי ביטוי קצבי המעברים בין המצבים השונים. על האלכסון הראשי, באים לידי ביטוי קצבי העזיבה של המצבים השונים. אם במצב i שוהים זמן בעל התפלגות $\exp(\lambda_i)$, אז האיבר ה i,i של היוצר הוא $-\lambda_i$.
הסימן השלילי מבטא את העובדה שכאשר נמצאים במצב i, יש מאזן הגירה שלילי ממצב i. עבור כל $i \neq j$, האיבר ה i, j מייצג את קצב המעבר ממצב i למצב j .
יתכן שממצב i לא נעבור למצב j , אבל איבר זה מייצג את עוצמת ההגירה ממצב i למצב j כאשר נמצאים במצב i.
בכל פרק זמן באורך h שבו נמצאים במצב i יש הסתברות של $\lambda_{i,j}h + o(h)$ שנעבור ממצב i למצב j .
ההסתברות שבפרק זמן זה נעזוב את מצב i לאיזשהו מצב היא $\lambda_i h + o(h)$ כאשר
$\lambda_i = \sum_{j\neq i}\lambda_{i,j}$. כאשר נמצאים במצב i, ההסתברות שכאשר נעזוב את מצב i, נעבור למצב j היא איבר במטריצת המעבר של זמני הקפיצות.

דוגמא
לבנק מגיעים לקוחות בזרם בעוצמה λ. בבנק יש שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. משך שירות מתפלג מעריכית עם פרמטר μ. מהו היוצר האינפיניטיסימלי ?
פתרון
מתקבלת מטריצה אינסופית שבכל אחד מהאיברים שבאלכסון שמשמאל לאלכסון הראשי מופיע μ ובאלכסון שמימין לאלכסון הראשי מופיע λ ובאלכסון הראשי מופיע הנגדי של סכומם כאשר יתר האיברים הם אפס. אברי המטריצה השונים מאפס הם: $\Lambda_{0,0} = -\lambda$, $\Lambda_{0,1} = \lambda$ ועבור $i \geq 1$:

$\Lambda_{i,i-1}=\mu$, $\Lambda_{i,i+1}=\lambda$, $\Lambda_{i,i}=-(\mu+\lambda)$.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & & \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \\ 0 & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא</u>

כעת נניח שזרם המגיעים הוא בעוצמה λ ויש שרת אחד ושני מקומות המתנה.

מרחב המצבים הוא כעת $\{0,1,2,3\}$ שמייצגם את מספר הפרטים שבמערכת בזמן נתון. היוצר הוא

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

לקוח שמגיע במצב בו המערכת מלאה נדחה.

<u>דוגמא</u>

מופע הצרכנים לתור הוא פואסוני בעוצמה λ. יש אין סוף שרתים וכל צרכן שמגיע לתחנה מתקבל מיד לשרות.

קצב השרות של כל שרת הוא μ.

מתקיים עבור כל $i\geq 0$ $\Lambda_{i,i+1}=\lambda$ ועבור כל $i\geq 1$: $\Lambda_{i,i-1}=i\mu$ ואברי האלכסון הם בהתאם.

הסבר: יש כאן סכום של i זרמים ממצב i למצב $i-1$ כאשר כל אחד מהם הוא בעוצמה μ.

<u>דוגמא</u>

כעת נניח שיש שלושה שרתים ויתר הנתונים לא השתנו.

במקרה זה מתקים $\Lambda_{1,0}=\mu$, $\Lambda_{2,,1}=2\mu$ ועבור כל $i\geq 3$ מתקיים $\Lambda_{i,i-1}=3\mu$ ושוב אברי האלכסון הם בהתאם. קצב השרות תלוי במספר השרתים שנותנים שרות. אף פעם לא יהיו יותר משלושה שרתים פעילים.

<u>מטריצת מעבר בזמן הקפיצות</u>

נתונה שרשרת מרקוב בעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמן הקפיצות היא

0	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
1	0	0

<u>שעון פואסוני</u>

אמרנו שבכל מצב שוהים זמן שמתפלג מעריכית ואז עוברים למצב אחר בהתאם להתפלגות שנתונה במטריצת המעבר. נרצה כאן שהקפיצות יהיו בהתאם לשעון אחיד שנתון לכל המצבים.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת שלושה מצבים ובעלת היוצר

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

מטריצת המעבר בזמן הקפיצות היא

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

אם ידוע שהיו בדיוק k קפיצות אז הסתברויות המעבר נתונות בעזרת החזקה ה- k של מטריצה זו.
אם לא ידוע מספר הקפיצות אז התהליך כולו יכול להיות מתואר ע"י טור המטריצות:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-6t}(6t)^k}{k!} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \hline \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \right)^k$$

(ההסתברות שיהיו בדיוק k קפיצות היא $e^{-6t}\frac{(6t)^k}{k!}$).

יש בעיה אם קצב העזיבה של מצבים שונים הוא שונה. איך נתגבר: נבחר קצב אחיד שגדול לפחות כמו קצב העזיבה מהמצב שאותו עוזבים בממוצע הכי מהר. את המצבים השונים לא בהכרח נעזוב כאשר תעבור יחידת זמן. ההסתברות להישאר במצב תשתנה בהתאם למצב.
<u>דוגמא</u> לכך:

שרשרת בעלת יוצר

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

קצב השעון צריך להיות לפחות 8. אם נקבע קצב של 8 אז התהליך יכול להיות מתואר כטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-8t}(8t)^k}{k!} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ \hline \frac{6}{8}\cdot\frac{4}{6} & \frac{2}{8} & \frac{6}{8}\cdot\frac{2}{6} \\ \hline \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2} & \frac{6}{8} \\ \hline \end{array} \right)^k$$

<u>הסבר</u>

משך הזמן בין יחידת מעבר ליחידה הבאה מתפלג מעריכית עם קצב 8. אך כאשר נמצאים במצבים שאותם עוזבים בקצב ממוצע איטי יותר אז בסיכוי מסוים נשארים במצב. זה בא לידי ביטוי כאן בכך שחלק מאברי האלכסון אינם אפס.

ניתן להציג את התהליך כטור מטריצות עם שעון בעל קצב מהיר יותר שבו בכל המצבים יהיה סיכוי להשתהות בזמני הפעימה של השעון. למשל נציג את התהליך עם שעון עם קצב 16:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-16t}(16t)^k}{k!} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{8}{16} & \frac{8}{16}\cdot\frac{4}{8} & \frac{8}{16}\cdot\frac{4}{8} \\ \hline \frac{6}{16}\cdot\frac{4}{6} & \frac{10}{16} & \frac{6}{16}\cdot\frac{2}{6} \\ \hline \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2} & \frac{14}{16} \\ \hline \end{array} \right)^k$$

באמצעות שעון פואסוני אפשר לחשב הסתברויות מעבר בזמן קבוע t. אבל המטרה העיקרית בהצגתו היא שפיכת אור על מבנה התהליך של שרשרת בזמן רציף.

נחזור לחישוב הסתברויות מעבר בזמן קבוע.

<u>דוגמא</u>

שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

מצאו את $P_{1,2}(t)$ כאשר t הוא זמן קבוע.

הדרך <u>לפתרון</u>

מקבלים משוואה דיפרנציאלית $P_{1,2}'(t)=P_{1,1}(t)-2P_{1,2}(t)$ ויש גם תנאי התחלה $P_{1,2}(0)=0$.

<u>הסבר</u> לתנאי ההתחלה: כשמתחילים במצב 1 אז בזמן 0 נמצאים במצב 1. כך $P_{1,1}(0)=1$ ו $P_{1,2}(0)=0$.

קבלנו משוואה דיפרנציאלית שקושרת בין המשתנה לבין נגזרתו.

נתנו כבר הוכחה לתקפות משוואות מסוג זה. נתן פה גם הסבר אינטואיטיבי: אם נמצאים במצב 2 אז יש "איום" לעזוב אותו בעצמה 2 ואם נמצאים במצב 1 אז נכנסים למצב 2 בעצמה 1.

נשים לב שיש גם משוואה דיפרנציאלית בעלת אותה צורה

$$P_{2,2}'(t)=P_{2,1}(t)-2P_{2,2}(t)$$

אבל $P_{2,2}(t)$ לא שווה ל $P_{1,2}(t)$ בגלל תנאי ההתחלה השונים: $P_{2,2}(0)=1$ ו $P_{2,1}(0)=0$.

<u>הערה</u>: מתקיים $\lim_{t\to\infty}P_{2,2}(t)=\lim_{t\to\infty}P_{1,2}(t)=\pi_2$ אבל אין שיוויון עבור t קבוע.

מכיון שיש רק שני מצבים אז מתקיים $P_{2,1}(t)=1-P_{2,2}(t)$. לכן נוכל לקבל משוואות שבכל אחת מהן יש רק משתנה אחד למשל: $P_{2,2}'=(1-P_{2,2}(t))-2P_{2,2}(t)$ ומתקבלת משוואה:

$$P_{2,2}'=1-3P_{2,2}(t)$$

נצטרך להתגבר על משוואות דיפרנציאליות מהצורה $y'=ay+b$.

נשים לב שעבור הפונקציה $y=e^{at}$ מתקיים $y'=ae^{at}$. נשתמש בעובדה זו ובעובדה שהנגזרת של קבוע היא אפס. כך אם $y=c_1e^{at}+c_2$ אז $y'=c_1ae^{at}$.

צריך לבחור מקדם c_2 כך שהאיבר החופשי יתקזז. לכן צריך להתקיים $c_2=-\frac{b}{a}$. כעת נשאלת השאלה איך לבחור את c_1 . כאן כדי לפתור את המשוואה יש לנו חופש תמרון. אם יש לנו תנאי התחלה אז צריך להתאים את בחירת c_1 לתנאי ההתחלה.

נחזור לאחת המשוואות שבהן עסקנו: $P_{2,2}'(t)=1-3P_{2,2}(t)$.

מתקיים $P_{2,2}(t)=\frac{1}{3}+c_1e^{-3t}$. מתקיים $e^{-3\cdot 0}=1$ לכן כדי לקיים את תנאי ההתחלה $P_{2,2}(0)=1$ צריך לבחור $\frac{1}{3}+c_1=1$ או $c_1=\frac{2}{3}$. לכן מתקיים $P_{2,2}(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t}$. נשים לב שכאשר $t\to\infty$ אז $P_{2,2}(t)$ שואף ל $\frac{1}{3}$ (כי $\lim_{t\to\infty}e^{-3t}=0$). זאת היא ההסתברות הסטציונרית של מצב 2. למעשה קיבלנו דרך אלטרנטיבית לחשב כאן את ההסתברות הגבולית שאותה ידענו כבר. במקרים יותר מסובכים נוכל בעזרת ידיעת ההסתברות הגבולית לקבל תנאי שפה נוסף שיקל עלינו את מציאת הפתרון.

נראה גם דרך כללית לפתירת משוואות דיפרנציאליות מהסוג שבו נתקלנו.

משוואות מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ נקראות משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון.

המקדמים לא תלויים במשתנה y והסדר הכי גבוה של הנגזרות הוא ראשון. $a(x)$ ו $b(x)$ הן פונקציות של x.

נכפיל את שני אגפי המשוואה בגודל $e^{A(x)}$ כאשר $A(x)=\int a(x)dx$.

נקבל משוואה $e^{A(x)}y'+e^{A(x)}a(x)y=e^{A(x)}b(x)$.

נשים לב שאגף שמאל הוא הנגזרת של $e^{A(x)}y$. לכן נקבל משוואה $\left(e^{A(x)}y\right)'=b(x)e^{A(x)}$. נעשה אינטגרציה על שני האגפים. באגף שמאל האינטגרל של הנגזרת הוא הפונקציה המקורית. נקבל $e^{A(x)}y=\int b(x)e^{A(x)}dx+c$.

כך נקבל $y=e^{-A(x)}\left(\int b(x)\,e^{A(x)}dx+c\right)$.

זו היא נוסחת פתרון סגורה. כדי לפתור את המשוואה כך צריך רק לעשות שתי פעולות אינטגרציה ואז להציב. נוסחא סגורה מבטלת את הצורך בניחוש פתרון. אבל לפעמים הניחוש הוא החלק היפה.

במקרה שבו נתקלנו בטיפול בשרשרות מרקוב היו הפונקציות $a(x)$ ו $b(x)$ קבועות.

אם יש משוואה $y^/ + ay = b$ אז $A(x) = \int adx = ax$.

נקבל אוסף פתרונות $y = e^{-ax}\frac{b}{a}e^{ax} + ce^{-ax} = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$.

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 11

שלומי

קשה מידי לטפל בהסתברויות המעבר בזמן סופי בשרשרות מסדר גדול מ 2. אך יש מקרים פשוטים שבהם אפשר לטפל. אלה מקרים שבהם אפשר להפעיל שיקולי סימטריה.

<u>דוגמא</u>

נחשב הסתברויות מעבר בשרשרת שהיוצר שלה הוא

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה</u>

מהו $P_{1,1}(t)$?

<u>פתרון</u>

נשים לב שמצבים 2 ו 3 סימטרים ביחס למצב 1. מכל אחד מהם יש מעבר בעצמה 2 למצב 1.
לכן נוכל להסתכל על שרשרת עזר בת שני מצבים שבה מצבים 2 ו 3 מהשרשרת המקורית מאוחדים.
היוצר של השרשרת הזאת הוא

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

נקבל משוואה דיפרנציאלית $P_{1,1}^{'}(t) = -4P_{1,1}(t) + 2(1 - P_{1,1}(t))$

או $P_{1,1}^{'}(t) = -6P_{1,1}(t) + 2$

ובנוסף $P_{1,1}(0) = 1$

נקבל פתרון $P_{1,1}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t}$

מכיון שביחס למצב 1 המצבים 2 ו 3 הם כאן סימטריים אז נקבל

$$P_{1,2}(t) = P_{1,3}(t) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t}\right)}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$$

חישוב הסתברויות המעבר ממצבים 2 ו 3 הוא כאן קצת יותר מסובך.
נתחיל בחישוב $P_{2,1}(t)$ ששווה ל $P_{3,1}(t)$. שוב ניתן להסתכל על היוצר

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

שמייצג חלוקה לקבוצות מצבים 1 מול 2 ו 3.

נקבל $P'_{2,1}(t) = -4P_{2,1}(t) + 2(1 - P_{2,1}(t))$

או $P'_{2,1}(t) = -6P_{2,1}(t) + 2$

ובנוסף $P_{2,1}(0) = 0$

נקבל פתרון $P_{2,1}(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$

עכשיו נרצה לחשב את $P_{2,2}(t)$.

מתקיים $P'_{2,2}(t) = -5P_{2,2}(t) + 2P_{2,1}(t) + 3P_{2,3}(t)$

אבל אנו כבר יודעים ש $P_{2,1}(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$

בנוסף, מכיוון שעבור כל זמן t מתקיים: $P_{2,1}(t) + P_{2,2}(t) + P_{2,3}(t) = 1$

אז $P_{2,3}(t) = 1 - P_{2,2}(t) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}\right) = \frac{2}{3} - P_{2,2}(t) + \frac{1}{3}e^{-6t}$

לכן נקבל משוואה דיפרנציאלית:

$$P'_{2,2}(t) = -5P_{2,2}(t) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}\right) + 3\left(\frac{2}{3} - P_{2,2}(t) + \frac{1}{3}e^{-6t}\right)$$

או $P'_{2,2}(t) = -8P_{2,2}(t) + \frac{1}{3}e^{-6t} + \frac{8}{3}$

<u>הערה</u>

זו משוואה לינארית מסדר ראשון. ראינו בסיכום הקודם שלמשוואות מסוג זה יש שיטת פתרון כללית. אבל אנחנו ננחש מסגרת פתרון כללית ונמצא את הפתרון המתאים במסגרת זו.

למשוואה זו נבחר פתרון: $P_{2,2}(t) = c_1e^{-6t} + c_2e^{-8t} + c_3$

צריך להתקיים: $-6c_1 = -8c_1 + \frac{1}{3}$

לכן נקבל ש $c_1 = \frac{1}{6}$.

לכן הפתרון הוא מצורת $P_{2,2}(t) = \frac{1}{6}e^{-6t} + c_2e^{-8t} + c_3$

מכיון ש $P_{2,2}(0) = 1$ אז $\frac{1}{6} + c_2 + c_3 = 1$

מכיון שההסתברות הסטציונרית של מצב 2 היא $\frac{1}{3}$ (שווה ל $\frac{1-\pi_1}{2}$ משיקולי סימטריה)

לכן $c_3 = \frac{1}{3}$. לכן מהמשוואה הקודמת נקבל $c_2 = \frac{1}{2}$

והפתרון הוא $P_{2,2}(t) = \frac{1}{6}e^{-6t} + \frac{1}{2}e^{-8t} + \frac{1}{3}$

בדוגמא קודמת (דומה לשאלה משיעורי בית) ראינו שההתפלגות הגבולית לאורך זמן לא בהכרח שווה להתפלגות בזמן הקפיצות.

נתן דוגמא נוספת
נתונה שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ונשאל באילו מצבים ההסתברות הגבולית גבוהה מההסתברות הגבולית בזמן הקפיצות ובאילו מקרים היא נמוכה יותר או שווה לה.

במקרה זה ניתן לענות לשאלה גם ללא ביצוע חישובים. במצבים השני והשלישי נתעכב בממוצע $\frac{1}{2}$ יחידת זמן עד קפיצה. במצב הראשון נתעכב בממוצע $\frac{1}{3}$ יחידת זמן עד קפיצה. לכן כל קפיצה מהמצבים השני והשלישי לוקחת בממוצע יותר מאשר קפיצה ממוצעת וכל קפיצה מהמצב הראשון לוקחת פחות מאשר קפיצה ממוצעת. השתמשנו כאן בעובדה שהממוצע הוא שקלול של שני ערכים בלבד.
לכן ההסתברות הגבולית של המצב הראשון היא נמוכה מההסתברות הגבולית שלו בזמני הקפיצות ואילו ההסתברות הגבולית של המצבים האחרים היא גבוהה מההסתברות הגבולית שלהם בזמן הקפיצות.

שאלה
נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף של תהליך פואסון.
האם ההסתברות הגבולית של המצבים השונים היא קטנה, שווה או גדולה מההסתברות הגבולית שלהם בזמן הקפיצות.

תשובה
בתהליך פואסון כל המצבים הם חולפים. לכן לגבי כל מצב, יש זמן סופי (סופי משתנה) שהחל ממנו לא נבקר בו יותר. לכן שני הגבולות שווים לאפס.

סוגיה
נתון תהליך מרקוב בזמן רציף על קבוצת המצבים $i = 0,1,2,\cdots$. נניח שמתקיים:

עבור $i \neq 0$: $P(X_{t+h} = i \mid X_t = 0) = \lambda_i h + o(h)$

ו $P(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 0) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i h\right) + o(h)$

עבור $i \neq 0$: $P(X_{t+h} = i-1 \mid X_t = i) = \mu_i h + o(h)$

ו $P(X_{t+h} = i \mid X_t = i) = 1 - \mu_i h + o(h)$

ועבור זוגות (i,k) אחרים: $P(X_{t+h} = i \mid X_t = k) = o(h)$

נניח שמתקיים $\lambda_i = \frac{\lambda^i}{i(i+1)}$ ו $\mu_i = \mu^i$ עבור כל $i \geq 1$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו אם קיימים זוגות (λ, μ) שעבורם השרשרת היא מהסוג המתואר. אם לא קיימים אז נמקו זאת ואם כן קיימים אז מצאו (λ, μ) מתאימים והראו שהם עונים לדרישה. בסעיפים השונים, זמני הקפיצות הם זמני המעבר ממצב למצב.
א. השרשרת היא חולפת.
ב. לשרשרת אין התפלגות גבולית ואין לה גם התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.

ג. לשרשרת יש התפלגות גבולית אך אין לה התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
ד. לשרשרת יש התפלגות גבולית ויש גם התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
ה. לשרשרת אין התפלגות גבולית אך יש התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.

<u>פתרון לסוגיה</u>

<u>א</u>. לא יתכן

מכל מצב i , $i>0$ בהכרח עוברים למצב $i-1$ לאחר זמן סופי. לכן מכל מצב i מגיעים באיזשהו שלב למצב 0. לכן מצב 0 הו מצב נשנה. השרשרת היא בלתי פריקה. לכן בגלל שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים הם נשנים.

<u>ב</u>. יתכן

נניח ש $\lambda=1$ ו $\mu=1$. ממצב 0 מגיעים לאחד המצבים האחרים. יש כאן תחרות בין משתנים מעריכיים.

ממצב 0 מגיעים למצב i בהסתברות $\frac{\frac{1}{i(i+1)}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}}=\frac{1}{i(i+1)}$. מספר הצעדים לחזרה למצב 0 דרך מצב i הוא $i+1$. לכן תוחלת מספר הצעדים לחזרה ממצב 0 למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}(i+1)=\sum\frac{1}{i}=\infty$.

לכן אין התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.

בכל מצב שוהים זמן בעל תוחלת 1 עד עזיבתו.

לכן גם תוחלת הזמן עד חזרה ל 0 היא ∞. לכן מצב 0 אינו נשנה חיובי וכך גם כל המצבים האחרים אינם נשנים חיובית.

<u>ג</u>. יתכן

נבחר את אותו $\lambda=1$ שהיה בסעיף ב'. לכן יש את אותה התפלגות של מספר הקפיצות עד חזרה ל 0. לכן אין התפלגות גבולית בזמן הקפיצות. נקבע שתוחלת זמן השהות במצב i עד מעבר למצב $i-1$ תהיה 0.5^i . לכן מכל מצב תהיה תוחלת זמן החזרה למצב 0 קטנה מ $\sum_{i=1}^{\infty}0.5^i=1$. לכן יש תוחלת זמן סופית לחזרה ממצב 0 למצב 0 ומצב 0 הוא נשנה חיובי.

<u>ד</u>. יתכן

נבחר את אותו μ שהיה בסעיף ג'. כך בכל מקרה תהיה תוחלת זמן סופית עד חזרה למצב 0. נבחר את λ להיות 0.5 . כל ההסתברות שממצב 0 נגיע ישירות למצב i תהיה: $\frac{0.5^i\frac{1}{i(i+1)}}{\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k\frac{1}{k(k+1)}}$

(שוב תחרות בין זרמים פואסונים). המכנה שווה לאיזשהו קבוע M (טור שנשלט על-ידי טור גיאומטרי).

המונה קטן מ 0.5^i, לכן המנה קטנה מ $\frac{0.5^i}{M}$. שוב מהלך ממצב 0 למצב i וחזרה לוקח $i+1$ צעדים ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{0.5^i}{M}(i+1)<\infty$. לכן תוחלת מספר הצעדים עד חזרה ל 0 היא סופית.

ממצב 0 ניתן להגיע ישירות למצבים 2 ו 3. לכן השרשרת הבלתי פריקה היא לא מחזורית ויש התפלגות גבולית בזמן הקפיצות.

<u>ה</u>. יתכן

נבחר את אותו λ שבחרנו בסעיף הקודם. כך תהיה תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 סופית.

כעת נקבע שתוחלת הזמן עד מעבר ממצב i למצב $i-1$ תהיה 3^i. שוב ההסתברות להגיע ממצב 0 ישירות למצב i תהיה $\frac{0.5^i \frac{1}{i(i+1)}}{M}$ כאשר M הוא קבוע. כדי לחזור ממצב i למצב 0 צריך לעבור i שלבים שרק לראשון שבינהם יש תוחלת 3^i. לכן תוחלת זמן החזרה למצב 0 גדולה מ

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{0.5^i \frac{1}{i(i+1)}}{M} \cdot 3^i = \infty$. לכן תוחלת זמן החזרה ממצב 0 לעצמו היא ∞ ולשרשרת אין התפלגות גבולית.

<u>תנאי האיזון המפורט</u>

במטריצה סופית מסדר נמוך קל לחשב את הוקטור הסטציונרי. זה יכול להיות קשה יותר בשרשרת אינסופית. נוכל להעזר לפעמים בתנאי האיזון המפורט. כאשר מאזן הכניסות והיציאות בין כל שני מצבים נשמר אז בודאי נשמר גם מאזן הכניסות והיציאות הכללי מכל מצב.

<u>דוגמא</u>

נניח שיש לנו את מערכת התור של שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. עבור כל i שלם ניתן לעבור ממצבים בעלי אינדקס לא גבוהה מ i למצבים בעלי אינדקס גבוה מ i רק ישירות ממצב i עצמו למצב $i+1$. בכיוון ההפוך בין שתי הקבוצות האלה של מצבים המעבר אפשרי רק ממצב $i+1$ למצב i. לכל מצב יש מעברים רק ממצבים בעלי אינדקס שכן. מכיון שלאורך זמן שכיחות המעברים בין כל שתי הקבוצות של בעלי אינדקס גבוה מ i או אינדקס לא גבוה מ i היא שווה אז מתקים תנאי האיזון המפורט ומתקים עבור כל $i \geq 1$: $\pi_i \mu = \pi_{i-1} \lambda$. לכן אם קיים וקטור הסתברויות סטציונרי אז נוכל לקבל עבור כל $i \geq 0$: $\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0$. אם הטור $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ מתכנס (זה קורה כאשר $\lambda < \mu$) אז נוכל לקבל הסתברויות סטציונריות $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$ ועבור j כללי

$$\pi_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}.$$

נשים לב שעבור $\lambda \geq \mu$ לא קיים וקטור סטציונרי.

האינטואיציה:

עבור $\lambda > \mu$, זרם המגיעים הוא בעל עוצמה גדולה יותר מאפשרות השירות לכן המצבים הם חולפים. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים תהיה החל מנקודה מסוימת כמות המגיעים גדולה תמיד מכמות אלה ששורתו.
עבור $\mu > \lambda$ קבלנו שיש וקטור סטציונרי. זה אומר בפרט שהמצבים הם נשנים. במקרה זה עבור כל מצב $i > 0$ שבו נמצאים אנו נשרת לקוחות כל עוד התחנה לא התרוקנה. מכיון שזרם המגיעים הוא קטן מזרם המסיימים שרות, אז יגיע הרגע שהתחנה תתרוקן. כאן יש סחיפה שמאלה. אך בקצה השמאלי יש את מצב 0 שממנו אי אפשר ללכת שמאלה.

ומה קורה כאשר $\lambda = \mu$?

כאשר נמצאים במצב $i > 0$ אז ההסתברות של קפיצה להיות שמאלה היא $\frac{\mu}{\lambda + \mu} \overset{here}{=} 0.5$.

הסיכוי שאי פעם נחזור למצב 0 שווה לסיכוי של הילוך מקרי סימטרי לחזור למצב 0. ראינו כבר בשיעורים קודמים שהילוך מקרי כזה הוא נשנה. לכן בודאות נחזור למצב 0. אך ראינו גם שבהילוך מקרי סימטרי, תוחלת מספר הצעדים עד חזרה לראשית היא אינסוף. כאן זמן הציפיה לכל צעד מתפלג כמינימום בין שני משתנים מעריכיים. זמן זה הוא בעל תוחלת קבועה. לכן תוחלת הזמן עד חזרה לראשית מכל מצב אחר שווה לאינסוף.

כאשר $\lambda < \mu$ אז התהליך בזמן הקפיצות הוא תהליך שמצביו הם חולפים. הוא דומה להילוך מקרי לא סימטרי. לכן במקרה זה גם התהליך לאורך זמן הוא תהליך שמצביו הם חולפים. לכך נתנו גם הסבר לפי החוק החזק.

<u>דוגמא</u>

נתונה שרשרת מרקוב עם מצבים $\{1,2,3\}$, בעלת יוצר

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

מצאו את תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למצב 3.

<u>פתרון</u>

במצב 1 שוהים זמן בעל תוחלת של $\frac{1}{3}$ יחידות זמן ואחר-כך בסיכוי $\frac{2}{3}$ עוברים למצב 2 ובסיכוי $\frac{1}{3}$ עוברים למצב 3. בצורה דומה, במצב 2 שוהים זמן בעל תוחלת של $\frac{1}{4}$ יחידות ואחר-כך בסיכוי $\frac{1}{4}$ עוברים למצב 1 ובסיכוי $\frac{3}{4}$ עוברים למצב 3. יהיו e_i - תוחלות זמן ההגעה ממצב i למצב 3.

מתקיים:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{2+1} e_2 + \frac{1}{2+1} \cdot 0 \\ e_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+3} e_1 + \frac{3}{1+3} \cdot 0 \end{cases}$$

<u>תוחלת זמן החזרה למצב 0</u>

נתונה מערכת תור של שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. נניח שזרם הצרכנים הוא פואסוני בעצמה 1 ומשך השרות מתפלג $\exp(1)$. נניח שברגע נתון יש צרכן אחד במערכת. מהי תוחלת הזמן עד שהתחנה לראשונה תתרוקן מצרכנים ?

<u>פתרון</u>

ממתינים עד לשינוי המצב (מעבר למצב 0 או למצב 2) זמן בעל תוחלת $\frac{1}{2}$ (תחרות בין שני משתנים מעריכיים בעלי פרמטר 1 כל אחד). אחר-כך אם מגיעים למצב 2 אז תוחלת זמן ההגעה משם למצב 0 היא $e_{2,0} = e_{2,1} + e_{1,0} = 2e_{1,0}$.

לכן נקבל משוואה $e_{1,0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2e_{1,0}$ או $e_{1,0} = \frac{1}{2} + e_{1,0}$.

למשוואה זו אין פתרון סופי. זה לא מפתיע כי ראינו שבמערכת תור מטפוס זה כאשר $\lambda \geq \mu$ אין וקטור סטציונרי.

<u>שאלה</u>

מה היה קורה אילו היינו משנים את פרמטר ההגעה ל λ ואת פרמטר העזיבה ל μ .

<u>פתרון</u>

היינו מחכים זמן ממוצע של $\frac{1}{\lambda + \mu}$ עד לשינוי המצב ומעבר לאחד המצבים 0 או 2. בסיכוי $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ היינו מגיעים כבר למצב 0 ובסיכוי $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ היינו מגיעים למצב 2. לכן מתקיים:

$$E_{1,0} = \frac{1}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot 0 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot E_{2,0}$$

מכיון ש $E_{2,0} = 2E_{1,0}$ (בשרשרת הספציפית הזאת), אז נקבל $E_{1,0} = \frac{1}{\mu - \lambda}$. מכאן תוחלת הזמן היא סופית אם"ם $\lambda < \mu$.

<u>הערה</u>

בגלל תכונת חוסר הזכרון של ההתפלגות המעריכית, זאת גם תוחלת זמן התעסוקה שמוגדרת כתקופה מהרגע הראשון שבו עוזבים את מצב 0 עד רגע החזרה הראשון אליו אחר-כך.

<u>דרך נוספת</u> לחישוב תוחלת זו

יהי a - התוחלת המבוקשת.

זו היא למעשה תוחלת הזמן עד הכחדות של השושלת שמורכבת מכל הצאצאים של הלקוח הנמצא בתחנה ושל כל צאצאיו לדורותיהם, כאשר כל דור מורכב מפרטים שמגיעים בזמן שהדור הקודם משורת.

הפרט הראשון ישורת בזמן בעל תוחלת $\frac{1}{\mu}$. בזמן זה יגיעו בממוצע $\frac{\lambda}{\mu}$ פרטים. עד להתרוקנות התור, צריך שכל השושלות האלה יכחדו. נקבל משוואה:

$$a = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu} a$$

נקבל את אותו פתרון שקבלנו קודם: $a = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 12

שלומי

<u>תהליכי לידה ומוות</u>

תהליך לידה ומוות הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף בעל מרחב מצבים שהם השלמים האי שליליים שמקיים גם את התכונה שמכל מצב ניתן לעבור רק למצבים בעל אינדקס שכן.

עבור $i \ge 1$: $\Lambda_{i,i+1} = \lambda_i \quad , \quad \Lambda_{i,i-1} = \mu_i \quad , \quad \Lambda_{0,1} = \lambda_0$

וכמובן שאברי האלכסון משלימים כל שורה לסכום אפס.

<u>דוגמא</u> לתהליך לידה ומוות

הדוגמא הראשונה היא תהליך פואסון שבו יש רק לידות: $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$ לכל $i \ge 0$ כאשר λ הוא קבוע.

<u>הגדרה</u>

תהליך לידה טהור הוא תהליך שבו יש רק לידות.

<u>דוגמא</u> לתהליך לידה ומוות

תהליך בו כל פרט מביא צאצא נוסף בפרק זמן באורך h בהסתברות $\lambda h + o(h)$ ונכחד בפרק זמן באורך h בהסתברות $\mu h + o(h)$. כאן איברים ביוצר האינפיניטיסימלי הם:

$$\Lambda_{i,i+1} = i\lambda \quad , \quad \Lambda_{i,i-1} = i\mu$$

<u>שאלה</u>

נתון תהליך לידה טהור בו $\Lambda_{i,i+1} = i\lambda$ לכל i . נניח ש $X(0) = 1$. מצאו את תוחלת גודל האוכלוסיה בזמן t קבוע.

<u>פתרון ראשון</u>

נחלק את האינטרוול $(0,t)$ ל n חלקים שווים. ההסתברות שבקטע זמן מסוים באורך $\frac{t}{n}$ יהיה יותר מאירוע אחד היא $o\left(\frac{t}{n}\right)$. כאשר $n \to \infty$ ההסתברות שבאיזשהו קטע זמן באורך $\frac{t}{n}$ יהיה יותר מאירוע אחד שואפת לאפס.

לאחר זמן $\frac{t}{n}$ תהיה תוחלת גודל האוכלוסיה

$$1\left(1 - \frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)\right) + 2\left(\frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)\right) = 1 + \frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)$$

כל פרט מתרבה ונכחד בכל זמן באותו קצב לכן, לאחר n יחידות זמן תהיה תוחלת גודל האוכלוסיה שווה ל $\left(1 + \frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. כאשר $n \to \infty$ גודל זה שואף ל $e^{\lambda t}$.

<u>פתרון בדרך נוספת</u>

יהי $y(t)$ תוחלת גודל האוכלוסיה בזמן t. מתקיים $y'(t) = \lambda y(t)$ ובנוסף מתקיים תנאי התחלה $y(0) = 1$ (הנחנו גזירות ש פונקצית התוחלת למרות שלא הוכחנו אותה). עם תנאי ההתחלה יש למשוואה הזאת פתרון יחיד $y = e^{\lambda t}$.

דוגמא נוספת

עכשיו נניח שיש קצב לידה קבוע של $i\lambda$ וקצב מוות $i\mu$. מה תהיה כעת תוחלת גודל האוכלוסיה בזמן t ?

פתרון ראשון

שוב נחלק את קטע הזמן עד t ל n קטעים שווים. תוחלת גודל האוכלוסיה לאחר זמן $\frac{t}{n}$ תהיה שווה ל

$$0\left(\mu\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)+1\left(1-(\lambda+\mu)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)+2\left(\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)=1+(\lambda-\mu)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)$$

שוב קצב הגדילה או הקטינה של האוכלוסיה נשאר קבוע ולכן לאחר n יחידות זמן תהיה תוחלת גודל האוכלוסיה שווה ל $\left(1+(\lambda-\mu)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. כאשר $n\to\infty$ גודל זה שואף ל $e^{(\lambda-\mu)t}$.

פתרון בדרך נוספת

יהי $y(t)$ - תוחלת מספר הפרטים בזמן t. מתקיים $y'(t)=\lambda y(t)-\mu y(t)$. למשוואה זו יש פתרון $y(t)=ce^{(\lambda-\mu)t}$. כאשר יש תנאי התחלה $y(0)=1$ אז הפתרון הוא $y(t)=e^{(\lambda-\mu)t}$.

שאלה שבפתרון שלה נעשה שימוש בהמשך

יש אוכלוסיה של n פרטים שכל אחד מהם חי זמן $\exp(\lambda)$ באופן בלתי תלוי באחרים ובכל מקרה לא מביא צאצאים (זהו תהליך מוות טהור והשתמשנו כאן ב λ לסימון קצב המוות. הסיבה לסימון זה תובהר בהמשך).
מהי ההסתברות שכל הפרטים יכחדו עד זמן t ?

פתרון

פרט מסוים ימות עד זמן t בהסתברות $1-e^{-\lambda t}$. לכן כל הפרטים ימותו עד זמן t בהסתברות $\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n$.

טענה

ההסתברות שבתהליך המוות האחרון שתואר, כל הפרטים יכחדו עד זמן t , היא ההסתברות שסכום משתנים מעריכיים בלתי תלויים שוני פרמטר בעלי פרמטרים $k\lambda$, $1\le k\le n$, יקבל ערך קטן מ t .

נימוק

כאשר יש בשלב מסוים k פרטים, אז יש עד המעבר למצב $k-1$, תחרות בין k משתנים מעריכיים.
כאשר עוברים שלב, אז קטן מספר הפרטים שמתחרים על המוות הראשון.

טענה

גם ההסתברות שבתהליך לידה טהור בעל קצבים $\lambda_{i,i+1}=i\lambda$ שבו מתחילים עם פרט אחד, יהיו עד זמן t לפחות $n+1$ פרטים היא ההסתברות שסכום של אותם משתנים מעריכיים שוני פרמטר יהיה קטן מ t .

הסבר

שוב מדובר בשלבים שונים שבכל אחד מהם, זמני הצפיה עד הגעה לשלבים הבאים מתפלגים התפלגויות מעריכיות עם פרמטרים מתאימים.

שאלה

נתון תהליך לידה טהור עם קצבים $\lambda_{i,i+1}=i\lambda$ ונניח שמתחילים עם פרט בודד.
מהי ההתפלגות של מספר הפרטים בזמן t ?

פתרון

הסתברות זאת שווה להסתברות שיהיו לפחות k פרטים, אך לא לפחות $k+1$ פרטים.
מהפתרון לשאלה הקודמת ומהטענות שבאו אחר-כך, נקבל שההסתברות שיהיו לפחות k פרטים שווה להסתברות שבתהליך מוות טהור בעל קצבי מוות $i\lambda$ שבו מתחילים עם $k-1$ פרטים, כולם יכחדו וההסתברות שיהיו לפחות $k+1$ פרטים שווה להסתברות שבתהליך מוות טהור בעל קצבי מוות $i\lambda$ שבו מתחילים עם k פרטים, כולם יכחדו. לכן נקבל שההסתברות שיהיו k פרטים היא

$$\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k-1}-\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k}=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k-1}$$

קבלנו שהתפלגות מספר הפרטים בזמן t היא $G\left(e^{-\lambda t}\right)$. מכאן התוחלת היא $e^{\lambda t}$ כפי שקבלנו גם קודם.

בשרשרת בלתי פריקה יש וקטור סטציונרי יחיד לכל היותר. יש וקטור סטציונרי רק במחלקה של מצבים נשנים חיובית. במחלקה של מצבים נשנים חיובית, יש וקטור סטציונרי גם אם המצבים מחזוריים. מחזוריות רק גורמת לכך שאין הסתברויות גבוליות למצבים נשנים חיובית.
למצבים נשנים חיובית ולא מחזוריים, יש להם הסתברויות גבוליות.
לגבי מצבים חולפים ונשנים אפס, יש להם הסתברות גבולית של אפס בין אם הם מחזוריים או לא מחזוריים.

שאלה

יואב ורמי מקיימים סדרת משחקים. בכל משחק יש מנצח אחד. התוצאות של המשחקים השונים הן בלתי תלויות.
בכל משחק סיכויו של יואב לזכות הם 0.6 וסיכויו של רמי לזכות הם 0.4. הראשון מבינהם שזוכה בשני משחקים רצופים זוכה בסדרה.

א. בנו מודל לחישוב סיכויו של יואב לזכות בסדרה. בניית מודל כוללת הצגה של מטריצת מרקוב ומערכת משוואות לחישוב הסיכויים. אין צורך לחשב את הסיכויים ואין צורך לפתור את מערכת המשוואות.

ב. מהי ההסתברות שאף פעם לא תושג הכרעה בסדרת המשחקים ?
יש לבסס את התשובה על מיון מצבים ולא על פתרון משוואות.

פתרון

נגדיר שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$

מצב 1 יהיה מצב התחלתי
מצב 2 יהיה מצב שעדיין לא נפלה הכרעה ויואב ניצח במשחק האחרון שהתקיים עד כה.
מצב 3 יהיה מצב שעדיין לא נפלה הכרעה ורמי ניצח במשחק האחרון שהתקיים עד כה.
מצב 4 יהיה מצב שכבר נפלה הכרעה בסדרה לטובת יואב.
מצב 5 יהיה מצב שכבר נפלה הכרעה בסדרה לטובת רמי.

מטריצת המעבר היא:

0	0.6	0.4	0	0
0	0	0.4	0.6	0
0	0.6	0	0	0.4
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

עבור כל $1 \le i \le 5$ נסמן ב a_i את סיכויו של יואב לזכות כאשר נמצאים במצב i.

סיכויו לנצח בסדרה הם a_1 .
מתקיים:

$$a_4 = 1 \quad , \quad a_5 = 0$$
$$a_1 = 0.6a_2 + 0.4a_3$$
$$a_2 = 0.4a_3 + 0.6a_4$$
$$a_3 = 0.6a_2 + 0.4a_5$$

המצבים $\{1,2,3\}$ הם המצבים היחידים בהם עדיין לא נפלה הכרעה כאשר נמצאים בהם.
מכיון שהם מספר סופי של מצבים חולפים אז נבקר בכל אחד משלושת מצבים אלה רק מספר סופי של פעמים. לכן בהסתברות 1 נגיע למצבים האחרים והכרעה תפול.

כעת נשאל מהי תוחלת מספר הצעדים עד שנופלת הכרעה.
נגדיר שלושה נעלמים e_1, e_2, e_3 שהן תוחלות מספר הצעדים עד שנגיע להכרעה כאשר מתחילים במצבים 1,2,3 . מתקיים:

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.6e_2 + 0.4e_3 \\ e_2 = 1 + 0.6 \cdot 0 + 0.4e_3 \\ e_3 = 1 + 0.6e_2 + 0.4 \cdot 0 \end{cases}$$

נשים לב שתוחלות מספרי הצעדים עד הגעה למצבים נשנים הן סופיות.
בכל אחד ממספר סופי של מצבים חולפים מבלים מספר צעדים שהוא בעל תוחלת סופית.

אבל, לא ניתן לדבר על תוחלת זמן הגעה למצב נשנה מסוים. במקרה זה, עבור כל מצב נשנה, יש הסתברות שכלל לא נגיע אליו. לכן, אין אפילו משתנה מקרי שמקבל רק ערכים סופיים שמודד את זמן ההגעה למצב נשנה מסוים.

<u>שאלה</u>
תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על כל השלמים, בו בכל שלב הולכים יחידה אחת ימינה בסיכוי 0.9 והולכים יחידה אחת שמאלה בסיכוי 0.1 . נניח שמתקיים $X_0 = 0$.
נגדיר סדרת משתנים $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שלכל n , $Y_n = |X_n|$.
עבור a ממשי קבוע, נגדיר סדרות משתנים $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שלכל n , $Z_n = |X_n - a|$ ו $W_n = \max\{Y_n, Z_n\}$.
כך למשל, אם $a = 1$ אז אם $X_n = -7$ אז $Y_n = |-7| = 7$, $Z_n = |-7-1| = 8$, $W_n = \max\{7,8\} = 8$ עבור אילו ערכים מבין הערכים $a = 0.4$, $a = 2$, $a = 1$, W_n היא שרשרת מרקוב הומוגנית ?
עבור כל ערך שהוא לא שרשרת מרקוב הומוגנית, יש לציין אם הוא אינו מרקובי או רק לא הומוגני בזמן.

<u>פתרון</u>
עבור $a = 0.4$ זאת היא שרשרת מרקוב הומוגנית.
במקרה זה W_n אומר לנו בדיוק היכן על הישר אנו נמצאים. אם W_n לא שלם אז אנו יודעים בדיוק באיזו נקודה שלילית אנו נמצאים ואם W_n שלם אז אנו יודעים בדיוק באיזו נקודה חיובית על הישר אנו נמצאים. ידיעת הערך המדויק של X_n נותנת את כל האינפורמציה הנחוצה לצעד הבא.

הערה: כך לגבי כל a לא שלם, W_n היא שרשרת מרקוב הומוגנית.

עבור $a=2$ אין מרקוביות.
אם למשל $(W_1=3, W_2=2)$ אז ברור ש $(X_1=-1)$ וש $(X_2=0)$ ואם למשל $(W_1=1, W_2=2)$ אז אנו או ב $(X_2=0)$ או ב $(X_2=2)$. משתי הנקודות האלה ההסתברויות לקבלת ערכי W_3 שונים הן שונות. לכן W_1 מוסיף אינפורמציה רלוונטית ולא כל המידע הרלוונטי נמצא בערכו של W_2.

עבור $a=1$ אין הומגניות בזמן.
אם W_n נתון ו n נתון אז נוכל לדעת בדיוק היכן אנו נמצאים. למשל אם W_n זוגי ו n זוגי, אז נוכל לדעת שאנו במקום שבו $X_n>0$ ונוכל גם לדעת בדיוק מהו ערכו של X_n. אבל אנו צריכים לדעת אם n זוגי או אי זוגי. אם למשל $n=2$ ו $W_n=1$ זה אומר שאנו בראשית, אבל אם למשל $n=1$ ו $W_n=1$ זה אומר שאנו בנקודה 1.
מכיון שההילוך אינו סימטרי, אז בכל אחד מהמקרים ההתפלגות של
W_2 היא שונה.

<u>שאלה</u> (מבחינה מ 15.08.08)
ישנן שתי השערות. ידוע שרק אחת מהן נכונה.
לליאת יש מחברת עבה בת 1001 דפים הממוספרים מ 0 עד 1000. ביום מספר 0 , ליאת רושמת בדף מספר 0 את אחת ההשערות, כאשר לכל השערה יש סיכוי שווה להירשם. אחר-כך בכל יום i , $1\le i\le 1000$, ליאת רושמת בדף i את אחת ההשערות , תוך שהיא מתחשבת רק בהשערתה מהיום הקודם. ידוע שאם השערתה ביום $i-1$ היתה נכונה, אז השערתה ביום i נכונה בסיכוי $\frac{3}{4}$, ואם השערתה ביום $i-1$ לא היתה נכונה, אז השערתה ביום i נכונה בסיכוי $\frac{1}{2}$. לאחר היום האחרון ליאת מראה לכל אחד מחבריה חלק מדפי המחברת. כל אחד מהחברים עושה כמיטב יכולתו כדי לקבוע איזו השערה נכונה.

<u>א</u>. דנה רואה רק את דף מספר 1. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכולה דנה לבחור בהשערה הנכונה ?
<u>ב</u>. פולינה רואה רק את דף מספר 1000. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכולה פולינה לבחור בהשערה הנכונה ?
<u>ג</u>. אדם רואה את כל דפי המחברת. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכול אדם לבחור בהשערה הנכונה ?
<u>ד</u>. אופיר רואה את 501 הדפים בעלי מספר זוגי. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכול אופיר לבחור בהשערה הנכונה ?

<u>תשובה</u>
<u>א</u>. בשלב 0 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{1}{2}$. בשלב 1 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$.
דנה תבחר בהשערה שהיא תראה וסיכויה הם $\frac{5}{8}$.

<u>ב</u>. סדרת ההשערות של ליאת היא שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

זאת היא מטריצה בלתי פריקה ובלתי מחזורית (ניתן לשהות במצב שני צעדים רצופים).
ההסתברות שבשלב ה- 1000 תהיה השערה נכונה, שווה בקירוב להסתברות הסטציונרית של המצב הראשון. ההסתברות הסטציונרית הזאת היא $\frac{2}{3}$. אם פולינה תבחר בהשערה שהיא תראה, אז סיכויה הם בקירוב $\frac{2}{3}$.

ג. במטריצה בלתי פריקה נשנית חיובית, יש התייצבות של השכיחויות של מצבים סביב ההסתברויות הסטציונריות שלהם. לכן ההסתברות שיהיה רוב להשערה הנכונה לאחר פרק זמן ארוך היא בקירוב 1. לכן אם אדם יבחר בהשערה שתופיע יותר אז סיכויו הם בקירוב 1.

ד. השרשרת היא לא מחזורית, לכן גם במקומות הזוגיים יש התייצבות סביב ההסתברות הסטציונרית. לכן גם אופיר יוכל לבחור בהשערה הנכונה בהסתברות שהיא בקירוב 1.

<u>שאלה</u> (מבחינה מ 17.07.09)
בכל אחד מהסעיפים הבאים רשומים תנאים על מצבים בשרשרת מרקוב.
בכל אחד מהסעיפים עליכם לקבוע ולנמק אם קיימת שרשרת שמצביה עונים על התנאים, כך שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$ עבור זוג מצבים שונים נתונים i, j, ואם קיימת שרשרת שמצביה עונים על התנאים, כך שלא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$ עבור זוג מצבים שונים נתונים i, j.
כאשר יש שרשרת מתאימה, אז יש לתת דוגמא מפורשת לשרשרת כזאת.
שימו לב שהסתברויות גבוליות יכולות להיות שוות לאפס או למספר חיובי.
שימו לב שבחלק מהסעיפים יתכנו שתי האפשרויות.

א. i, j מצבים בשרשרת סופית.

ב. לא קיימים אף אחד מהגבולות $\lim_{n\to\infty} P_{i,k}^{(n)}$ עבור כל מצב $k \neq j$.

ג. j מצב נשנה חיובי בעל מחזור 3 וניתן להגיע ממצב i למצב j.

ד. i, j שני מצבים נשנים חיובית בעלי מחזור שונה.

ה. i, j זוג מצבים נשנים ומחזוריים בשרשרת בלתי פריקה בעלת אינסוף מצבים.

<u>תשובה</u>
נראה שקיימות 9 אפשרויות מתוך $2\cdot 5 = 10$ אפשרויות (רק בסעיף ד' אפשרות אחת לא תתכן).

א. שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

בכל שלב, ההסתברות להיות במצב 1 היא 0.5 ולכן ההסתברות הגבולית היא גם 0.5 ולא צריך אפילו להסתמך על שום טענה.
לעומת זאת בשרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני גבולות חלקיים של 0 ו 1 ולכן לא קיים הגבול.

ב. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא קיים אף גבול עבור כל זוג מצבים i, j.

בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם j הוא המצב השלישי, אז מכיון שלא ניתן כלל להגיע למצב השלישי ממצבים אחרים אז קיים הגבול אפס עבור כל מצב i אחר. לעומת זאת, עבור כל זוג מצבים אחר אין גבול.

<u>ג.</u> בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא קיים הגבול.

בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר i הוא המצב הראשון ו j הוא למשל המצב השני, קיים הגבול ששווה ל $\frac{1}{3}$.

<u>ד.</u> בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר למשל i הוא המצב הראשון ו j הוא המצב האחרון, אז מכיון שכלל לא ניתן להגיע מ i ל j אז הגבול הוא אפס.

מחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית. לכן שני מצבים ארגודיים שהם בעלי מחזוריות שונה, אינם מקושרים. לכן בהכרח קיים הגבול אפס.

<u>ה.</u> נסתכל על שרשרת שמצביה הם השלמים האי שליליים. מכל מצב $i > 0$ עוברים בהסתברות 1 למצב 0. ממצב 0 עוברים למצב i בהסתברות 0.5^i עבור כל $i > 0$. כך כשמתחילים במצב 1 אז מבקרים במצב 0 בכל צעד אי זוגי ואין אפשרות לבקר בו בצעדים הזוגיים. כשמתחילים במצב 0 אז בודאות חוזרים אליו לאחר שני צעדים. לכן מצב 0 הוא נשנה. מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

נסתכל על שרשרת שמצביה הם השלמים האי שליליים ושבה מתקיים עבור כל $i \geq 1$: $P_{i,i-1} = 1$,

מתקיים עבור כל $i \geq 0$: $P_{0,2i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$ ואין מעברים ישירים ממצב 0 למצבים בעלי אינדקס זוגי.

מכל מצב חייבים לחזור למצב 0. לכן מצב 0 הוא מצב נשנה. ממצב 0 יש מסלולים לכל המצבים. מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים הם נשנים. המחזור של מצב 0 הוא 2 ומכיון שמחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית אז המחזור של כל המצבים הוא 2.

אם עוברים ממצב 0 למצב $2i+1$ אז לוקח $1+2i+1=2i+2$ צעדים עד חזרה למצב 0.

תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}(2i+2)=\infty$. לכן מצב 0 אינו נשנה חיובי. לכן כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה אינם נשנים חיובית ולכן קיים הגבול ששווה לאפס.

דוגמא נוספת היא ההילוך המקרי הסימטרי על הישר. גם כאן כל המצבים הם בעלי מחזור 2 ונשנים אפס.

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הרצאה 13</u>

שלומי

<u>על ההתפלגות הגבולית של שרשרת בזמן רציף</u>

נתונה שרשרת בזמן רציף בעל יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

וקטור ההסתברויות הסטציונריות שלה הוא $(0.5,0.5)$. ניתן לקבל את התוצאה הזאת על-ידי פתירת מערכת משוואות לחישוב הוקטור הסטציונרי. נראה גם בדרך אחרת שזאת ההתפלגות הגבולית.

ניתן להציג את הסתברויות המעבר כסכום של טור $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$

כאשר הזמן שואף לאינסוף אז מספר הקפיצות המצטבר גם שואף לאינסוף. כאשר יש הרבה קפיצות אז מתקרבים לוקטור הסטציונרי שהוא וקטור ההסתברויות הגבוליות של מטריצת המעבר בזמן הקפיצות שהיא כאן

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ושיש לה וקטור סטציונרי $(0.5,0.5)$.

מכיון שהשרשרת המקורית היא שרשרת בזמן רציף, אז אין משמעות למחזוריות, כי קפיצות יכולות להתרחש בכל זמן.

<u>שאלה</u>

מדוע לשרשרת שלה היוצר

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

אין את אותה התפלגות גבולית כמו לשרשרת המייצגת את זמני הקפיצות שלה שהיא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

<u>תשובה</u>

כבר הסברנו שיש מצב שבו מתעכבים בממוצע פחות זמן לכל קפיצה.

אם נציג את התהליך כשעון פואסוני שלו קצב אחיד ומהמצב הראשון לא נקפוץ בכל פעימה של השעון, אז נשתמש במטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ובטור $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2t} \frac{(2t)^k}{k!} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ אז כאשר $t \to \infty$, מספר הקפיצות שואף לאינסוף. לכן נקבל שהוקטור הסטציונרי של השרשרת בזמן רציף שווה לוקטור הסטציונרי של מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אם נציג את התהליך כסכום טור $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-4t}\frac{(4t)^k}{k!}\begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}^k$ אז נקבל שיש לו אותה הסתברות גבולית כמו למטריצת המעבר $\begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$.

מכאן גם לשתי מטריצות המעבר $\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$ יש את אותו וקטור סטציונרי.

<u>הערה</u> לגבי <u>רציפות ההתפלגות</u> של תהליך מרקוב בזמן רציף.
הראנו דרך למציאת מערכת משוואות דיפרנציאליות לחישוב הסתברויות המעבר בזמן סופי.
בכך למעשה גם הראינו שהסתברויות המעבר $P_{i,j}(t)$ הן גזירות. לכן למעשה הראינו גם שהן רציפות.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף $X(t)$ בעלת המצבים $\{1,2\}$ ובעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

מצאו $\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right)$.

<u>פתרון</u>

בשרשרת זו יש וקטור סטציונרי יחיד $(0.5,0.5)$.
יש שאיפה של המשתנים $X(t)$ ו $X(2t)$ למשתנים בעלי התפלגות סטציונרית. כמו כן, כאשר $t\to\infty$ התלות בין המשתנים נעלמת כי יש רווח זמן ששואף לאינסוף בינהם. כל אחד משני המשתנים מקבל את הערכים 1 ו 2 בהסתברויות ששואפות להיות שוות וזאת בלי קשר למצב ההתחלתי.
לכן מתקיים:

$$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}=1.125$$

<u>סוגיה</u>

נסתכל על שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ובעלת יוצר

$$\begin{pmatrix}-(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_3 & -(2\lambda_3) & \lambda_3\\ \lambda_2 & \lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2)\end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$.

אילו ערכים יכול לקבל $\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right)$?

<u>פתרון</u>

כאשר $t \to \infty$ יש שאיפה של זוג המשתנים $X(t)$ ו $X(2t)$, למשתנים בלתי תלויים בעלי התפלגויות שוליות שהן ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת. מכיון שהשרשרת בלתי פריקה, אז כל אחד מהערכים $\{1,2,3\}$ מתקבל בהסתברות חיובית ממש. בגלל שההתפלגויות של $X(t)$ ושל $X(2t)$ הן דומות אז כל ערך מתקבל בהסתברות זהה להסתברות שמתקבל הערך ההופכי שלו. יש סימטריה בין המצבים 1 ו 3, לכן כל מנה שבה משתתף 1 מתקבלת באותה הסתברות כמו מנה שבה משתתף 3. מהסימטריה בין כל מספר להופכי שלו מתקבל שלא יכול להתקבל גבול קטן מ 1. גם גבול ששווה ל 1 לא יכול להתקבל כי השרשרת בלתי פריקה ולכן ישוקללו גם ממוצעים של מספרים שונים מ 1 וההופכי שלהם. יכול להתקבל כל גבול שקרוב כרצוננו ל1, אך גדול מ 1. את זה נקבל אם נבחר פרמטרים שיקרבו את ההסתברות הסטציונרית של מצב 2 ל 1. אם מצד שני נקרב את ההסתברויות הסטציונריות של מצבים 1 ו 3 ל 0.5, אז נוכל לקבל גבול שקרוב כרצוננו ל $\frac{4}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{3}{1}+\frac{3}{3}\right)$. אבל זהו חסם עליון שלא ניתן להשיג אותו כי כל ממוצע בין המנות בהם משתתפים מספרים מתוך קבוצת המצבים הוא קטן יותר.

(בכל שקלול בו משתתף 2, יש אותן הסתברויות ל $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ו $\frac{3}{2}$).

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ על קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

נגדיר תהליך

$$Y_n = \begin{cases} a & X_n \in \{1,2\} \\ b & X_n = 3 \end{cases}$$

האם התהליך $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב הומוגנית על מרחב המצבים $\{a,b\}$?

<u>פתרון</u>

זאת היא שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

<u>הסבר</u>: אם נמצאים במצב 1 או במצב 2 ולא משנה באיזה מהם, יש מעבר למצב 3 בהסתברות 0.3 . המעברים למצב 3 הם זהים משני מצבים אלה. לכן ההיסטוריה וזהות התקופה לא מוסיפים אינפורמציה רלוונטית.

<u>שאלה</u>

בהתייחס לשאלה הקודמת,

<u>א</u>. האם היה ניתן לשאול את אותה שאלה ולקבל את אותה תשובה חיובית בהתייחס למטריצה 3×3 שכל אבריה חיובים ממש ושרק זוג אחד מתשעת אבריה הוא זהה וכל יתר אברי המטריצה הם שונים כל אחד מכל האחרים ?

ב. האם היה ניתן לשאול את אותה שאלה ולקבל את אותה תשובה חיובית בהתייחס למטריצה 3×3 שכל אבריה הם חיובים ממש ושכולם שונים אחד מהשני ?

פתרון

א. כן

מספיק ש $P_{2,3}=P_{1,3}$ כדי שבלי שום קשר לעבר ולזהותה של התקופה, סיכויי המעבר ממצב a למצב b יהיו שווים ל $P_{1,3}$.

ב. כן

מספיק ש $P_{1,1}/P_{1,2}=P_{2,1}/P_{2,2}=P_{3,1}/P_{3,2}$ כדי שבלי שום קשר לעבר ולזהות התקופה, בהינתן שאנו במצב a אז ההסתברות שאנו למעשה במצב 1 היא $\frac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}=\frac{P_{2,1}}{P_{2,1}+P_{2,2}}=\frac{P_{3,1}}{P_{3,1}+P_{3,2}}$ וההסתברות שאנו למעשה במצב 2 היא $\frac{P_{1,2}}{P_{1,1}+P_{1,2}}=\frac{P_{2,2}}{P_{2,1}+P_{2,2}}=\frac{P_{3,2}}{P_{3,1}+P_{3,2}}$.

כך ההסתברות לעבור ממצב a למצב b היא $\frac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}P_{1,3}+\frac{P_{1,2}}{P_{1,1}+P_{1,2}}P_{2,3}$.

נוסיף את התנאי שבשלב ההתחלתי אנו במצב b , כך בכל שלב שאנו במצב a , אנו למעשה במצב 1 בסיכוי $\frac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}$.

דוגמא למטריצת מעבר שעונה על הדרישות היא: $\begin{pmatrix}0.62 & 0.31 & 0.07\\ 0.42 & 0.21 & 0.37\\ 0.22 & 0.11 & 0.67\end{pmatrix}$

שאלה

יהי A_n - המאורע שבשלב ה- n נבקר במצב i מסוים קבוע.

א. עבור אילו סוגים של מצבים קיים $\lim_{n\to\infty}P(A_n)$?

ב. עבור איזה סוג של מצבים קיים $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$ עבור כל מצב התחלתי ?

פתרון

א. למשל מצבים סופגים: במקרה זה הגבול שווה להסתברות להגיע אליהם.
מצבים חולפים או מצבים נשנים אפס: במקרים אלה הגבול שווה לאפס עבור כל מצב התחלתי.
וגם כל מצב נשנה חיובי לא מחזורי: במקרה זה הגבול שווה למכפלה של ההסתברות להגיע אליו בהסתברות הסטציונרית שלו. במקרה זה הגבול תלוי בזהות המצב ההתחלתי- בהסתברות להגיע אליו מהמצב ההתחלתי.
אם מצב הוא נשנה חיובי ומחזורי אז הגבול לא קיים עבור כל מצב התחלתי. למשל ממנו עצמו ניתן להגיע אל עצמו רק במספרים מסוימים של צעדים (כפולות של המחזור). ממצבים אחרים יכולים להיות מספר תתי גבולות, אם כי יתכן שיש מצבים התחלתים שמהם כל תתי הגבולות שווים. למשל בדוגמא

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(מהמצב הראשון מגיעים למצב 3 במספר זוגי של צעדים בסיכוי חצי ובמספר אי-זוגי בסיכוי חצי).

ב. מצבים סופגים: אם מגיעים אליהם, אז לעולם לא עוזבים אותם. למשל מצב 0 בתהליך הסתעפות. או מצבים שמשום מצב לא ניתן להגיע אליהם.

שאלה

נתונה מערכת תור עם שרת אחד ושני מקומות המתנה. בזמן נתון השרת יכול לתת שרות ללקוח אחד. כאשר השרת עסוק ומגיע לקוח, אז אם יש מקום המתנה פנוי, אז הלקוח מצטרף לתור הממתינים לשרות. אם שני מקומות ההמתנה תפוסים, אז לקוח שמגיע נדחה ועוזב את התחנה. נניח שקצב במגיעים לתחנה הוא פואסוני בעצמה λ ושרות של לקוח בודד מתפלג $\exp(\mu)$.

א. מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך.

ב. מצאו את וקטור ההסתברויות הסטציונריות של התהליך.

ג. מהי לטווח ארוך פרופורצית הלקוחות שמגיעים לתחנה ונדחים ?

תשובה

א. מצבי השרשרת הם

0- תחנה ריקה

1- יש לקוח אחד בשרות

2- יש בתחנה שני לקוחות שאחד מהם הוא בשרות והאחר בהמתנה

3- יש בתחנה שלושה לקוחות שמהם אחד בשרות ושני האחרים בהמתנה

היוצר הוא

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

ב. נתן מערכת לחישוב הוקטור הסטציונרי

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (\mu+\lambda)\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ (\mu+\lambda)\pi_2 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\ \mu\pi_3 = \lambda\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

ג. הלקוחות שנדחים הם הלקוחות שמגיעים כאשר בתחנה יש שלושה לקוחות, זאת אומרת אחד בשרות ושניים בהמתנה. שכיחות דחיית הלקוחות היא השכיחות של מצב 3 שהיא π_3.

שאלה

נתונה מערכת תור עם שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. לתחנה מגיעים צרכנים בזרם פואסוני בעל עצמה 1. שירות של כל צרכן לוקח בדיוק יחידת זמן אחת. נסתכל על התהליך $X(t)$ של מספר הצרכנים שבמערכת בזמן t.

א. האם התהליך הזה הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף ?

ב. האם השרשרת המייצגת את מספר הצרכנים שבמערכת בזמני הקפיצות ממצב למצב, היא שרשרת מרקוב בזמן בדיד ?

ג. האם השרשרת המייצגת את מספר הצרכנים שבמערכת בזמני סיום השרות היא שרשרת מרקוב בזמן בדיד ?

פתרון

א. לא — בשרשרת מרקוב בזמן רציף, זמן השהות במצב מתפלג מעריכית. כאן עבור כל מצב $i \geq 1$, לא נשהה בו ברציפות יותר מיחידת זמן אחת (יתכן שפחות). משתנה שחסום על-ידי קבוע איננו משתנה מעריכי.

ב. לא — במצבים השונים יש קפיצות מהם שיכולות להיגרם מהצטרפות לקוח או עזיבת לקוח. אם אנו במצב 2 והיינו קודם במצב 3 אז העזיבה הבאה תבוא בעוד יחידת זמן אחת ואם קודם היינו במצב 1 אז העזיבה הבאה תבוא בעוד פחות מיחידת זמן אחת כי אנו כבר היינו בזמן שירות. לכן במקרה זה ההסתברות שהקפיצה הבאה תהיה של עזיבה היא גדולה יותר מאשר במקרה הראשון.

ג. כן — מספר הצרכנים שבמערכת בזמן סיום שירות נותן לנו את כל האינפורמציה להמשך. אם המערכת לא נשארה ריקה אז יש התפלגות קבועה של מספר המגיעים לשירות עד תום השירות הקרוב. אם המערכת נשארה ריקה אז יש את אותה התפלגות של מספר המגיעים עד תום השירות הבא.

סוגיה

ההסתברויות הסטציונריות של שרשרת מרקוב אי פריקה ניתנות על-ידי $\pi_i = (1-\alpha)\alpha^i$ עבור $i = 0,1,2,\cdots$.

א. הוכיחו שאם $\alpha < \frac{1}{2}$ אז $P_{0,0} > 0$.

ב. עבור $\alpha = \frac{1}{2}$, תנו דוגמא למטריצת מעבר שבה $P_{0,0} = 0$.

פתרון

א. אם $a < 0.5$ אז כאן $\pi_0 > 0.5$. מתקיים תמיד: $\pi_0 = \pi_0 P_{0,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{i,0}$

אילו היה מתקיים $P_{0,0} = 0$ אז היינו מקבלים:

$$\pi_0 \leq \pi_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot 1 = 1 - \pi_0 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_0 \leq 0.5$$

אך כאמור $\pi_0 > 0.5$ ומתקבלת סתירה.

פתרון בדרך נוספת

מכיון ש $\pi_0 \geq 0.5$ אז תוחלת זמן החזרה למצב 0 היא קטנה מ 2. לכן לא יתכן שבהסתברות 1 נחזור למצב 0 ביותר מצעד אחד (לפחות שני צעדים). לכן יש הסתברות חיובית שנחזור למצב 0 בצעד אחד.

הערה

אם יש הסתברות חיובית לחזור למצב 0 צעד אחד לאחר שהתחלנו בו, אז מצב 0 הוא לא מחזורי וקיימת הסתברות גבולית להיות בו. הסתברות זו שווה להסתברות הסטציונרית של המצב.

ב. נניח שמתקיים עבור כל $i \geq 1$: $P_{i,0} = 1$, מתקיים עבור כל $i \geq 1$: $P_{0,i} = 0.5^i$ ($\sum_{i=1}^{\infty} 0.5^i = 1$)

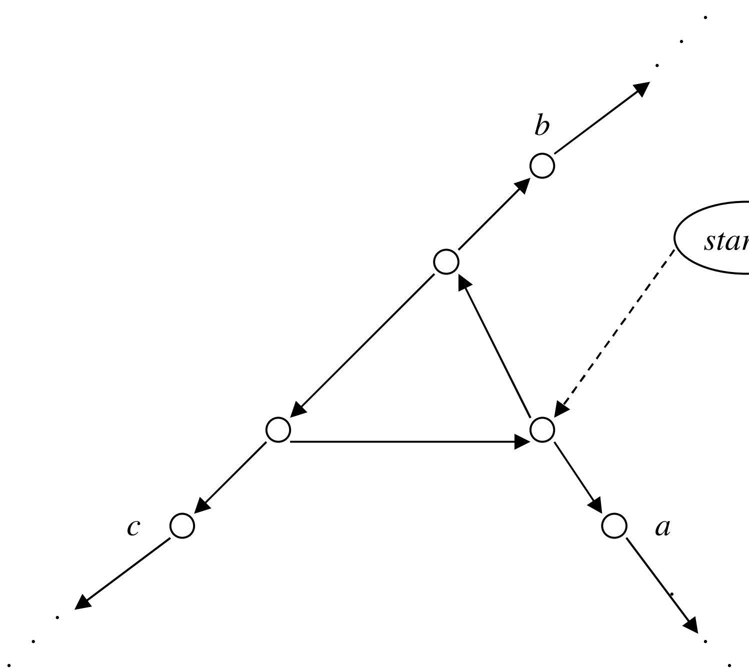
ומתקיים $P_{0,0} = 0$.   שימו לב ש $\pi_0 = 0.5$ ($\pi_0 = \pi_0 \cdot 0 + (1-\pi_0) \cdot 1$).

הערה

במקרה זה שכיחות הביקורים במצב 0 היא 0.5 (מבלים במצב 0 במחצית מהצעדים). אבל לא קיימת הסתברות גבולית לבקר במצב 0 (אם מתחילים בו, אז ההסתברות לבקר בו בצעד זוגי היא 1 וההסתברות לבקר בו בצעד אי זוגי היא 0).

סוגיה

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף:



כאשר נמצאים בנקודה אז יש זרימה בעצמה λ עם כיוון החץ ויש זרימה בעצמה μ כנגד כיוון החץ.
השאלה היא, מהי ההסתברות להקלט בכל אחד מהענפים כאשר מתחילים במצב המסומן.

פתרון

שכבה i תהיה קבוצת הנקודות שמרחקן מהמשולש הוא i. יסמנו פה את הסיכויים להקלט בענפים השונים a_i, b_i, c_i. נחשב את הסיכוי לחזור אי פעם משכבה 1 למשולש. אם סיכוי זה הוא p אז הסיכוי לחזור משכבה 2 הוא p^2 כי ממנה צריך לחזור קודם ל 1 וזה קורה בסיכוי p .

$$p = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot 1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} p^2$$

מכיון שלא בטוח שנחזור למשולש באיזשהו שלב, אז הפתרון המבוקש הוא הפתרון שקטן מ 1. פתרון זה הוא $\frac{\mu}{\lambda}$.

לכן בהסתברות $\frac{\lambda-\mu}{\lambda}$ בטוח נהיה ביציאה שעליה אנו נמצאים ובסיכוי $\frac{\mu}{\lambda}$ נחזור פעם לשכבה 0 ולמצב ההתחלתי בבעיה שלנו והסיכויים יהיו a_0,b_0,c_0 כמו בבעיה שלנו.

$$\begin{cases} a_0=\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\cdot 1+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\cdot a_0+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot b_0+\frac{\mu}{2\lambda+\mu}\cdot c_0 \\ b_0=\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\cdot 0+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\cdot b_0+\frac{\mu}{2\lambda+\mu}\cdot a_0+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot c_0 \\ c_0=\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\cdot 0+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda}\cdot c_0+\frac{\lambda}{2\lambda+\mu}\cdot a_0+\frac{\mu}{2\lambda+\mu}\cdot b_0 \end{cases}$$

(אם עוברים על צלע במשולש אז מתחלפים התפקידים בין a_0,b_0,c_0)

אפשר להחליף את המשוואה הראשונה במשוואה פשוטה יותר $a_0+b_0+c_0=1$.

(משיקולי סמטריה, סכום ההסתברויות להקלט בזרוע a מהזרועות השונות שווה לסכום ההסתברויות להקלט בזרועות השונות כשמתחילים בזרוע a. סכום זה הוא 1).

<u>גרסא של החוק החזק</u>

תהי $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות ב"ת. נניח שמתקיים $P(X_1=1)=p$, $P(X_1=0)=1-p$. על הסדרה הזאת חל החוק החזק (הם בעלי מומנט רביעי סופי קבוע והם ב"ת).

המשמעות של קיום החוק החזק על הסדרה, היא שעבור כל $\varepsilon>0$ בהסתברות 1 , $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ סוטה מ p , שהיא תוחלת הממוצע, ביותר מ ε רק עבור מספר סופי של ערכי n.

ננסה לחסום את ההסתברות $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-p\right|>\varepsilon\right)$ בעזרת אי שיוויון צ'בישב.

נקבל חסם ששווה ל $V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)/\varepsilon^2=\frac{nV(X_1)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$.

מכיון ש $\infty=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}\approx\sum_{i=1}^{\infty}\frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$, אז לא ניתן להוכיח באמצעות שימוש ישיר באי שיוויון צ'בישב והלמה של בורל קנטלי, שהחוק חל על הסדרה.

אך ננסה בכל זאת להוכיח בעזרת אי שיוויון צ'בישב והלמה של בורל קנטלי שהחוק החזק חל על הסדרה.

נסתכל על נקודות a_i שלמות המוגדרות בצורה הבאה: $a_1=\left\lceil\frac{100}{\varepsilon^2}\right\rceil$ ועבור כל $i\ge 1$: $a_{i+1}=a_i+\left\lfloor\sqrt{a_i}\right\rfloor$.

<u>טענה</u>

אם בנקודה a_i אין סטייה ביותר מ $\frac{\varepsilon}{2}$, אז בכל הנקודות שבין a_i ל a_{i+1}, אין סטייה ביותר מ ε.

<u>הסבר</u>

המרחק בין a_2 ל a_1 לא מהווה יותר מחלק ה $\frac{\varepsilon}{10}$ מגודלו של a_1. מכיון שהסדרה $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא מונוטונית עולה, אז עבור $i \geq 2$, $\sqrt{a_i}$ מהווה חלק עוד יותר קטן מ a_i. לכן עבור כל $i \geq 1$ מתקיים $a_{i+1} - a_i \leq \frac{\varepsilon}{10} a_i$.

אם בנקודה a_i מתקיים שהסטייה של הממוצע מתוחלתו קטנה מ $\frac{\varepsilon}{2}$, אז בכל הנקודות שבין a_i ל a_{i+1} , הסטייה לא גדולה מ $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{10}$ (המקרה הקיצוני הוא שכל התוצאות בנקודות שבין a_i ל a_{i+1} הן מאותו סוג).

לכן אפשרית סטייה ביותר מ ε רק בקטעים שבין a_i ל a_{i+1} , רק כאשר ב a_i היתה סטייה גדולה מ $\frac{\varepsilon}{2}$. מכיון שבכל קטע כזה יש רק מספר סופי של שלמים, אז די להוכיח שרק במספר סופי של ערכי a_i תהיה סטייה גדולה מ $\frac{\varepsilon}{2}$.

<u>טענה</u>

עבור כל t טבעי יש לא יותר מ $3 \cdot 2^t$ נקודות a_i בין 4^t ל 4^{t+1}.

<u>הסבר</u>

עבור כל $a_i \geq 4^t$ מתקיים $a_{i+1} - a_i \geq \sqrt{4^t} = 2^t$. אורך הקטע שבין 4^t ל 4^{t+1} הוא $3 \cdot 4^t$ והוא מתחלק לקטעים זרים שכל אחד מהם לא קטן מ 2^t.

עבור נקודה a_i שבין 4^t ל 4^{t+1} ננסה לחסום בעזרת אי שיוויון צ'בישב את ההסתברות לסטייה של יותר מ $\frac{\varepsilon}{2}$ בין הממוצע לתוחלתו. נקבל חסם

$$\frac{V(X_1)}{a_i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{4^t\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{1}{4^{t-1}\varepsilon^2}$$

אם A_i הוא המאורע שבנקודה a_i יש סטייה של יותר מ $\frac{\varepsilon}{2}$, אז אם $4^t \leq a_i < 4^{t+1}$, אז מתקיים

$P(A_i) \leq \frac{1}{4^{t-1}\varepsilon^2}$.

כעת נסתכל על $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

סכום ההסתברויות עבור i שעבורם $4^t \leq a_i < 4^{t+1}$ הוא לא יותר מ $3 \cdot 2^t \frac{1}{4^{t-1}\varepsilon^2} = \frac{3}{2^{t-2}\varepsilon^2}$.

אם נסכום את ההסתברויות של המאורעות A_i, נקבל $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{3}{2^{t-2}\varepsilon^2} = \frac{12}{\varepsilon^2} < \infty$.

לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, יתקבלו סטיות גדולות מ $\frac{\varepsilon}{2}$, רק במספר סופי של נקודות a_i, ולכן יתקבלו רק מספר סופי של סטיות גדולות מ ε בנקודות שלמות בכלל.