מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ הקדמה

שלומי

הקורס יעסוק בעיקר בסוג מסוים של תהליכים סטוכסטיים שנקראים שרשרות מרקוב.
נוכיח בנוסף מספר קטן של תוצאות לגבי תהליכים סטוכסטיים כלליים. בחלק מהתוצאות האלה נעשה שימוש בעיסוק בשרשרות מרקוב. אך יש ענין גם בעיסוק בהם לכשעצמם.

<u>הגדרה:</u>
תהליך סטוכסטי הוא סדרת משתנים מקריים או רצף של משתנים מקריים.
בקורסים קודמים עסקתם בעיקר במשתנים מקריים בודדים (חד מימדיים) או במשתנים מקריים בעלי מספר מימדים.
כאן נעסוק בסדרה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ או ברצף של משתנים מקריים X_t כאשר $0 \le t < \infty$.
כל משתנה יכול לקבל ערך מתוך קבוצה נתונה של ערכים.
<u>הגדרה:</u>
קבוצת הערכים האפשריים של המשתנים תקרא קבוצת המצבים של התהליך.
כפי שאמרנו, נעסוק באוסף בן מניה של משתנים או ברצף של משתנים. קבוצת המצבים תהיה בשני המקרים סופית או בת מניה.
<u>דוגמא לתהליך סטוכסטי:</u>
בכל שלב מטילים מטבע. יהי X_n שווה לתוצאה שמראה המטבע. אם התוצאות האפשריות הן 0 ו 1 , אז $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא תהליך סטוכסטי בעל מרחב מצבים $\{0,1\}$.
אם למשל ידוע שתוצאות המטבעות הן בלתי תלויות אז יש לנו תהליך סטוכסטי של סדרת משתנים בלתי תלויים. אם יש חוקיות אחרת לגבי התוצאות אז יש תהליך סטוכסטי אחר.
<u>דוגמא לתהליך סטוכסטי בזמן רציף</u>: יהי X_t מספר הלקוחות אצל כספר בבנק בזמני t השונים לאחר הפתיחה. הרצף של המשתנים X_t מתאר את כל מה שקרה אצל הכספר.

שרשרות מרקוב בזמן בדיד

<u>הגדרה:</u>
על סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ חלה תכונת המרקוביות אם מתקיים עבור כל i, j

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

עבור כל ערכים אפשריים של המשתנים הקודמים.
<u>הסבר:</u>
תכונת המרקוביות אומרת שכל המידע על הערך שיקבל X_{n+1} נמצא בערכו של X_n .
זאת אומרת שאם אנו יודעים את ערכו של X_n אז המידע הקודם כבר לא רלוונטי.
<u>הערה:</u>
אמרנו שהערכים של המשתנים הקודמים כבר לא רלוונטים, אבל עדיין לא אמרנו שערכו של n לא רלוונטי.
<u>שאלה:</u>
האם זה אומר ש X_n בלתי תלוי ב X_{n-2} ?
<u>תשובה:</u> לא
<u>הסבר לתשובה:</u>
נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא הילוך מקרי על הישר. בהילוך המקרי הולכים על השלמים שעל הישר. בכל שלב באופן בלתי תלוי בשלבים האחרים בסיכוי 0.5 הולכים יחידה אחת ימינה ובסיכוי 0.5 יחידה שמאלה.
כך אם ידוע ש $(X_{16} = 14)$ זה אומר בהכרח ש $P(X_{17} = 15) = P(X_{17} = 13) = 0.5$.
אבל ברור ש X_{17} כן תלוי ב X_{15} . אם למשל ידוע ש X_{15} הוא שלילי אז X_{17} לא יכול לקבל את הערך 9. אך כללית הוא כן יכול לקבל את הערך 9.

הגדרה:
הומוגניות בזמן היא תכונה שאומרת שהסתברויות המעבר גם לא תלויות בזמן (זאת אומרת באינדקס של המצב). זאת אומרת שעבור כל n,m ועבור כל i : התפלגות X_{n+1} בהינתן $(X_n = i)$ זהה להתפלגות X_{m+1} בהינתן $(X_m = i)$.

<u>דוגמא לתהליך מרקובי שאינו הומוגני בזמן</u>:
הילוך מקרי שבו בכל בשלב ה-n הולכים בהסתברות $\frac{1}{2^n}$ ימינה ובסיכוי המשלים $1-\frac{1}{2^n}$ הולכים שמאלה, באופן בלתי תלוי בשלבים האחרים.
<u>הסבר</u>: כאן כל המידע הרלוונטי לגבי ערכו של X_{n+1} נמצא בערכו של X_n, אך התפלגות X_{17} בהינתן $(X_{16}=0)$ אינה זהה להתפלגות X_5 בהינתן $(X_4=0)$.

הגדרה:
תהליך סטוכסטי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שמקיים את תכונות המרקוביות וההומוגניות בזמן נקרא שרשרת מרקוב. זהו סוג התהליכים שבו נעסוק ברוב הקורס.

<u>הגדרת מטריצת מעבר של תהליך מרקוב</u>:
כאשר יש שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, אז יש מטריצה רבועית שמתארת את הסתברויות המעבר ממצב למצב. לגבי כל מצב יש שורה שבה רשומות הסתברויות המעבר ממצב למצב.

<u>תיאור של מטריצות מעבר</u>:
המטריצה היא מסדר סופי אם קבוצת המצבים היא סופית ויכולה להיות מסדר אינסופי אם יש מספר בן מניה של מצבים. סכום האיברים בכל שורה הוא 1 כי סכום ההסתברויות לעבור למצבים השונים מכל מצב נתון הוא 1. אברי האלכסון מייצגים את ההסתברויות להישאר במצבים השונים. כמובן שכל אברי המטריצה הם אי שליליים.

<u>דוגמאות לשרשרות מרקוב</u>

<u>1</u>. סדרת הטלות בלתי תלויות של מטבעות הוגנים. זו שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר:
$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

<u>2</u>. נתונים שני כדים ושלושה כדורים: בכל שלב בוחרים כדור אקראי ומעבירים אותו לכד האחר. כאן יש לנו שרשרת בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2,3\}$, כאשר כל מצב מייצג את מספר הכדורים בכד הראשון בשלב נתון. מטריצת המעבר היא:
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

<u>3</u>. הילוך מקרי על הישר כאשר בכל שלב הולכים ימינה בסיכוי p ושמאלה בסיכוי $1-p$ באופן בלתי תלוי בשלבי הקודמים: כאן יש מספר אינסופי של מצבים שמייצגים את השלמים. במטריצת המעבר כל אברי האלכסון שמימין לאלכסון הראשי שווים ל p וכל אברי האלכסון שמשמאל לאלכסון הראשי שווים ל $q=1-p$. יתר אברי המטריצה שווים לאפס.
התהליך הוא $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ ועבור כל n: $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$ כאשר עבור כל i מתקיים $P(Z_i=+1)=p=1-P(Z_i=-1)$ והמשתנים Z_i הם בלתי תלויים. שימו לב שיש כאן חשיבות למצב ההתחלתי וזאת בניגוד לדוגמא הראשונה שנתנו של הטלות של מטבע הוגן שבה אין לתוצאות קודמות כל השפעה על הבאות.

<u>4</u>. לדן יש סכום התחלתי של 3 שקלים ולערן יש סכום התחלתי של 2 שקלים. בכל שלב כל עוד אף

אחד מהם לא התרושש, כל אחד מהם שם שקל אחד על השולחן. מתקיימת הגרלה בה דן זוכה בסכום שעל השולחן בסיכוי p וערן זוכה בו בסיכוי $q=1-p$. התהליך מסתיים כאשר אחד מהם מתרושש. יש כאן שרשרת בת 6 מצבים, כאשר מצב i מייצג את המצב שבידי דן יש i שקלים. מטריצת המעבר נראית כך:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

מצבים 0 ו 5 הם מצבים שאם מגיעים אליהם, אז לא עוזבים אותם יותר.

<u>הגדרה</u>:

מצב סופג הוא מצב שאם מגיעים אליו אז יותר לא עוזבים אותו.

<u>5</u>. כאן גם מתרחש הימור של דן, אך מולו עומדת קופה אינסופית. כאן במטריצת המעבר שהיא אינסופית השורה הראשונה היא של 1 בודד ואחר-כך רק אפסים. לגבי כל שורה אחרת i האיבר $P_{i,i-1}$ במטריצת המעבר P שווה ל q , האיבר $P_{i,i+1}$ שווה ל p ויתר האיברים שווים לאפס. כאן יש רק מצב סופג אחד.

<u>6</u>. שרשרת של תור עם שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. לתור מופעים בכל יחידת זמן i לקוחות בהסתברות a_i. השרת משרת ביחידת הזמן לקוח אם בתחילת יחידת הזמן היה לקוח בתחנה. מטריצת המעבר האינסופית תראה כך:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}$$

שתי השורות הראשונות הן זהות. אחר-כך כל שורה היא הזזה במקום אחד של השורה שמעליה.

<u>שאלה</u>

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים $\{1,2,3\}$. נגדיר תהליך סטוכסטי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$$Y_n = \begin{cases} a & X_n \in \{1,2\} \\ \\ b & X_n = 3 \end{cases}$$

האם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא בהכרח שרשרת מרקוב ?

<u>תשובה</u>: לא. למרות שבמקרים מסוימים יתכן שכן.

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית. נגדיר שרשרת מרקוב בעלת שלושה מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים $P(Y_2 = b \mid Y_0 = a, Y_1 = a) = 1$ אך $P(Y_2 = b \mid Y_0 = b, Y_1 = a) = 0$.
זאת אומרת שערכו של Y_0 נותן אינפורמציה נוספת על האינפורמציה הנתונה בערכו של Y_1. אם כבר אנו שני צעדים רצופים במצב a אז ברור שבשרשרת המקורית אנו במצב 2, ואם אנו רק צעד אחד רצוף במצב a אז ברור שבשרשרת המקורית אנו במצב 1.

<u>שאלה</u>
למכונה יש שני רכיבים שכל אחד מהם תקין זמן המתפלג $G(0.5)$ באופן בלתי תלוי באחר. המכונה נמצאת במצב 1-פועלת כל עוד לפחות אחד מהרכיבים תקין. המכונה נמצאת במצב 0-לא פועלת, כאשר אף אחד מהרכיבים כבר לא תקין.
<u>א</u>. האם התהליך שמתאר את מספר הרכיבים התקינים הוא שרשרת מרקוב ?
<u>ב</u>. האם התהלך שמתאר את פעילות המכונה בזמנים השונים הוא שרשרת מרקוב ?
<u>תשובות</u>
<u>א</u>. כן. יש שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

<u>ב</u>. לא. בהתחלה היא מבוססת על שני רכיבים וההסתברות ששניהם יפלו עד השלב הבא היא 0.25 . אחר-כך כלל לא בטוח שהיא מבוססת על שני רכיבים ולכן ההסתברות להגיע ממצב פועל למצב לא פועל היא גדולה יותר. לכן לא מתקיימת תכונת ההומוגניות בזמן.

<u>הגדרות</u>
$P_{i,j}$ היא ההסתברות להגיע למצב j תוך צעד אחד לאחר שנמצאים במצב i.
$P_{i,j}^{(n)}$ היא ההסתברות לעבור ב n צעדים ממצב i למצב j .

אינטואיטיבי לחשוב שהמטריצה $P^{(n)}$ זהה לחזקה ה-n-ית של מטריצת המעבר P .
זה אכן קורה.

<u>הסתברויות מעבר מסדר גבוה מ-1</u>

<u>טענה</u>
$P^{(n)} = P^n$
נוכיח באינדוקציה.
מובן ש $P^{(1)} = P$.
נניח שעבור כל $t \le n$ מתקיים $P^{(t)} = P^t$ ונראה שמתקיים גם $P^{(n+1)} = P^{n+1}$.
לפי הסתברות שלמה מתקיים $P_{i,j}^{(n+1)} = \sum_k P_{i,k}^{(n)} P_{k,j}^{(1)}$. (כדי להגיע ב $n+1$ צעדים ממצב i למצב j , צריך לעבור באיזשהו מצב בשלב n).
מתקיים $P^{(1)} = P$ ולפי הנחת האינדוקציה מתקיים $P^{(n)} = P^n$. לכן מתקיים $P_{i,j}^{(n+1)} = \sum_k P_{i,k}^n P_{k,j}$.
באגף ימין יש הכפלה של מטריצות וכמובן שלכל מטריצה P מתקיים $P^n P = P^{n+1}$.
לכן מתקיים $P_{i,j}^{(n+1)} = P_{i,j}^{n+1}$.

הגדרה:

$f_{i,j}^{(n)}$ היא ההסתברות להגיע למצב j לראשונה ב n צעדים כאשר מתחילים במצב i.

$f_{i,j}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)}$ - זאת היא ההסתברות להגיע אי פעם ממצב i למצב j.

הגדרה:

מצב i מקושר למצב j אם קיים מסלול באורך כלשהו ממצב i למצב j.

הגדרה:

מצבים i ו j הם מקושרים אם מכל אחד מהם יש מסלול לאחר שבינהם.

הגדרה:

מצב i הוא מצב ארגודי אם לגבי כל מצב j ש i מקושר אליו, i מקושר גם מ j.

דוגמא:

שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{matrix} 0.1 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

קבוצת המצבים $\{2,3,4\}$ הם מקושרים כל אחד לאחר ואין מהם גישה למצבים אחרים, לכן הם מצבים ארגודים. ממצב 1 יש גישה למצבים שמהם אין גישה בחזרה, לכן הוא לא מצב ארגודי.

טענה:

אם i הוא ארגודי ו i מקושר ל j אז גם j מקושר ל i ומצב j הוא גם ארגודי.

הוכחה:

נתייחס למצבים שאליהם ניתן להגיע ממצב j. אם ממצב j ניתן להגיע למצב k אז גם ממצב i ניתן להגיע למצב k (דרך j), אך מצב i הוא ארגודי ולכן ממצב k יש מסלול למצב i, לכן ממצב k יש מסלול גם למצב j (דרך מצב i). לכן מצב j חייב להיות ארגודי.

מסקנה:

את המצבים הארגודים ניתן לחלק למחלקות שקילות.

אם i ארגודי שמקושר ל j אז הם באותה מחלקה וכמו-כן כל מצב שבאותה מחלקה עם אחד מהם הוא גם באותה מחלקה עם האחר.

הגדרה:

מחלקה בלתי פריקה של מצבים היא קבוצת מצבים שבה כל מצב מקושר לכל מצב אחר, ואין מסלולים מקבוצה זו אל מצבים שמחוץ לקבוצה.

הערה: מחלקה בלתי פריקה היא למעשה מחלקת שקילות של מצבים ארגודים.

הגדרה:

מצב i הוא מצב נשנה אם $f_{i,i}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)}=1$, זאת אומרת אם בודאות חוזרים ממנו אל עצמו.

הגדרה:

מצב חולף הוא מצב שאינו נשנה, זאת אומרת שחוזרים אליו בהסתברות נמוכה מ 1.

טענה:

אם מצב הוא נשנה אז כאשר מתחילים בו אז חוזרים אליו אינסוף פעמים בהסתברות 1.

נימוק:

לפי הגדרתו כמצב נשנה אז לאחר כל ביקור בו, יש ביקור נוסף בהסתברות 1.

המשלים של המאורע של אינסוף ביקורים הוא איחוד בין מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס.

טענה:

מצב שאינו ארגודי הוא חולף.

נימוק:

ממצב i שאינו ארגודי יש מסלול למצב j שממנו אין דרך חזרה למצב i. קיימת הסתברות חיובית שנעשה את רצף הצעדים ממצב i למצב j ואז לא נחזור יותר למצב i.

נראה שהטענה בכיוון ההפוך אינה נכונה.

דוגמא למצב ארגודי שהוא חולף:

נגדיר שרשרת מרקוב על מרחב מצבים שהם השלמים האי שליליים.

ממצב 0 הולכים בודאות למצב 1. עבור כל מצב i $i>0$ הולכים למצב 0 בסיכוי $\frac{1}{3^i}$ ואחרת הולכים למצב $i+1$. מכל מצב יש מסלול (אפילו ישיר) למצב 0 , לכן מצב 0 הוא מצב ארגודי. אבל ההסתברות לחזור למצב 0 לא גדולה מסכום ההסתברויות לחזור אליו מהמצבים האחרים שהוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}<1$.

טענה:

בשרשרת סופית מצב ארגודי הוא בהכרח מצב נשנה.

לטענה זאת נראה שתי הוכחות שונות בשלבים שונים של הקורס. אבל קודם לכן נעשה בה ובטענות האחרות שימוש לצורך מיון מצבים למחלקות אי פריקות של מצבים נשנים ולמצבים חולפים.

דוגמא:

מיינו את מצבי השרשרת בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר:

$$\begin{matrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{matrix}$$

קבוצת המצבים $\{4,5\}$ היא קבוצה בלתי פריקה של מצבים נשנים. המצב 3 הוא בפני עצמו קבוצה בלתי פריקה של מצב נשנה. המצבים 1 ו 2 הם חולפים. מצב 1 הוא מצב חולף למרות שאין ממנו מסלול ישיר (של צעד אחד) למצב שממנו אין דרך חזרה.

טענה:

יהיו i ו j מצבים בשרשרת מרקוב סופית בת M מצבים. אם קיים מסלול ממצב i למצב j בעל אורך כלשהו, אז קיים מסלול באורך של לא יותר מ M מ i ל j .

הוכחה:

נניח שיש מסלול באורך m. אם $m \le M$ אז קיים מסלול כנדרש. אם $m > M$ אז יש מצב r שמופיע במסלול יותר מפעם אחת. לכן ניתן לקצר את המסלול על-ידי קיצוץ חלק המסלול שבין מצב r לעצמו. עדיין נקבל מסלול שבו לכל מעבר יש הסתברות חיובית ממש. כך ניתן לקצר כל מסלול שבו האורך גדול מ M. כך לא יתכן שאורך המסלול המינימלי יהיה גדול מ M.

הערה:

אם i ו j הם בהכרח מצבים שונים אז קיום מסלול אפילו גורר קיום מסלול באורך לא יותר גדול מ $M-1$. אבל נסתפק בתוצאה הכללית שקיים מסלול באורך לא יותר מ M.

נסתמך על התוצאה הזאת כדי לתת את ההוכחה הראשונה לכך שכל מצב ארגודי בשרשרת סופית בת M מצבים הוא נשנה.

הוכחה:

מכיון שמצב i הוא מצב ארגודי אז עבור כל מצב j יש מסלול באורך לא יותר גדול מ M ממצב j למצב i. עבור כל מצב j יש הסתברות של לפחות a_j להגיע למצב i תוך M (את a_j הוא אצלנו

מכפלת ההסתברויות על המסלול שעל קיומו הצבענו). נגדיר $a = \min_j \{a_j\}$. המינימום של מספר סופי קבוע של מספרים חיובים ממש הוא מספר חיובי ממש. כדי להוכיח שמצב i הוא נשנה די להראות שההסתברות לא לחזור אליו מעצמו שואפת לאפס כאשר מספר הצעדים שואף לאינסוף. יש לנו סיכוי של לפחות a לחזור תוך M צעדים. אם לא נחזור תוך זמן זה, אז נהיה במצב אחר. עבור כל מצב אחר הסיכוי לחזור למצב יהיה שווה שוב לפחות a. עבור כל k טבעי, ההסתברות לא לחזור למצב i תוך kM צעדים, לא תהיה גדולה מ $(1-a)^k$. מכיוון ש $a > 0$ אז הסתברות זאת תשאף לאפס כאשר $k \to \infty$.

<u>בעיות נוספות</u>

<u>שאלה</u>

למכונה שני רכיבים. לרכיב הראשון אורך חיים המתפלג $G(0.5)$ ולרכיב השני אורך חיים המתפלג $G(0.8)$. אורכי החיים של שני הרכיבים השונים הם בלתי תלויים. נגדיר תהליך סטוכסטי בעל קבוצת המצבים $\{0,1,2\}$ המייצגים את מספר הרכיבים התקינים בזמן נתון.
האם התהליך הזה הוא שרשרת מרקוב ?

<u>פתרון</u>

לא מתקיימת תכונת ההומוגניות בזמן.
נתחיל רק עם אינטואיציה ואחר-כך נראה חישובים.
כאשר המכונה די חדשה אז יש סבירות לא כל כל נמוכה שאם היא עובדת על רכיב אחד, אז זהו הרכיב החלש (שהוא בעל זמן חיים המתפלג $G(0.8)$). זה פחות סביר מאשר שהיא עובדת על הרכיב החזק, אבל עדיין בעל סבירות לא נמוכה. כאשר היא עובדת לאחר הרבה זמן על רכיב אחד אז הסבירות שזהו הרכיב החלש דועכת ולכן סיכוייה ליפול עד השלב הבא קטנים יותר (כפי הנראה היא מתבססת על הרכיב החזק).
ועכשיו לחישובים:
בהינתן שהיא עובדת על רכיב אחד ביחידת הזמן השניה, ההסתברות שזהו החלש היא: $\frac{0.2\cdot 0.5}{0.2\cdot 0.5+0.8(1-0.5)}$ וההסתברות שזהו הרכיב החזק היא $\frac{0.8\cdot 0.5}{0.2\cdot 0.5+0.8\cdot 0.5}$.
ההסתברות השלמה שהיא תעבוד גם ביחידת הזמן שמייד אחר-כך היא:

$$\frac{0.2\cdot 0.5}{0.2\cdot 0.5+0.8\cdot 0.5}0.2+\frac{0.8\cdot 0.5}{0.2\cdot 0.5+0.8\cdot 0.5}0.5$$

אם למשל לאחר 10 יחידות זמן היא עובדת בהתבסס על רכיב אחד אז ההסתברות שזהו הרכיב החלש היא $\frac{0.2^9\left(1-0.5^9\right)}{0.2^9\left(1-0.5^9\right)+0.5^9\left(1-0.2^9\right)}$ וההסתברות השלמה שהרכיב שעובד יעבוד גם בשלב הבא היא

$$\frac{0.2^9\left(1-0.5^9\right)}{0.2^9\left(1-0.5^9\right)+0.5^9\left(1-0.2^9\right)}0.2+\frac{0.5^9\left(1-0.2^9\right)}{0.2^9\left(1-0.5^9\right)+0.5^9\left(1-0.2^9\right)}0.5$$

<u>הערה</u>: כאשר הזמן שואף לאינסוף, אז לגבי מכונה שמתבססת על רכיב אחד, ההסתברות שהיא תעבוד עוד יחידת זמן אחת שואפת ל 0.5. הסיבה לכך היא שההסתברות המותנה שהיא עובדת בהתבסס על הרכיב החזק, שואפת ל 1.

<u>שאלה</u>

נתונה שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על השריג הדו-מימדי.
נניח שבכל שלב הולכים צעד אחד ימינה, או צעד אחד שמאלה, או צעד אחד למעלה, בסיכוי $\frac{1}{3}$ כל אחד, ואף פעם לא למטה. נניח שההילוך מתחיל בראשית.
יהי (X_n, Y_n) מיקום הנקודה בשלב ה-n. יהי Z_n מרחק הנקודה מהראשית בשלב ה-n.

כך למשל אם $X_n = 2$ ו $Y_n = 3$ אז $Z_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

האם הסדרה $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת מרקוב הומוגנית ?

<u>פתרון</u>

זאת לא שרשרת מרקוב.

$$P(Z_4 = 0 \mid Z_0 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = \sqrt{2}, Z_3 = 1) = 0 \neq P(Z_4 = 0 \mid Z_0 = 0, Z_1 = 1, Z_2 = 0, Z_3 = 1)$$

מהנקודה $(1,1)$ אין דרך חזרה לראשית. מצד שני אם יתכן שלא עזבנו את ציר ה-X אז יתכן שנחזור לראשית.

לכן ערכו של Z_3 לא נותן את כל האינפורמציה הרלוונטית לגבי התפלגות Z_4. המשתנים הקודמים מוסיפים מידע רלוונטי.

יכולנו גם להראות שאין הומוגניות בזמן:

$Z_n = 5$ אם נמצאים בנקודה $(5,0)$ וגם אם נמצאים בנקודה $(4,3)$. מהנקודה $(4,3)$ יש מעבר לנקודה $(4,4)$ שבה $Z_n = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$. מהנקודה $(5,0)$ אין מעבר בשלב אחד לנקודה בה $Z_n = \sqrt{32}$. אם $Z_5 = 5$ אז לא יתכן ש $Z_6 = \sqrt{32}$, אך אם $Z_7 = 5$ אז יתכן ש $Z_8 = \sqrt{32}$ כי יתכן שבשלב השביעי אנו ב $(4,3)$.