מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 11

שלומי

קשה מידי לטפל בהסתברויות המעבר בזמן סופי בשרשרות מסדר גדול מ 2. אך יש מקרים פשוטים שבהם אפשר לטפל. אלה מקרים שבהם אפשר להפעיל שיקולי סימטריה.

<u>דוגמא</u>

נחשב הסתברויות מעבר בשרשרת שהיוצר שלה הוא

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה</u>

מהו $P_{1,1}(t)$?

<u>פתרון</u>

נשים לב שמצבים 2 ו 3 סימטרים ביחס למצב 1. מכל אחד מהם יש מעבר בעצמה 2 למצב 1.
לכן נוכל להסתכל על שרשרת עזר בת שני מצבים שבה מצבים 2 ו 3 מהשרשרת המקורית מאוחדים.
היוצר של השרשרת הזאת הוא

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

נקבל משוואה דיפרנציאלית $P'_{1,1}(t) = -4P_{1,1}(t) + 2(1 - P_{1,1}(t))$

או $P'_{1,1}(t) = -6P_{1,1}(t) + 2$

ובנוסף $P_{1,1}(0) = 1$

נקבל פתרון $P_{1,1}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t}$

מכיון שביחס למצב 1 המצבים 2 ו 3 הם כאן סימטריים אז נקבל

$$P_{1,2}(t) = P_{1,3}(t) = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t}\right)}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t}$$

חישוב הסתברויות המעבר ממצבים 2 ו 3 הוא כאן קצת יותר מסובך.
נתחיל בחישוב $P_{2,1}(t)$ ששווה ל $P_{3,1}(t)$. שוב ניתן להסתכל על היוצר

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

שמייצג חלוקה לקבוצות מצבים 1 מול 2 ו 3.

נקבל $P'_{2,1}(t) = -4P_{2,1}(t) + 2(1 - P_{2,1}(t))$

או $P'_{2,1}(t) = -6P_{2,1}(t) + 2$

ובנוסף $P_{2,1}(0)=0$

נקבל פתרון $P_{2,1}(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-6t}$

עכשיו נרצה לחשב את $P_{2,2}(t)$.

מתקיים $P'_{2,2}(t)=-5P_{2,2}(t)+2P_{2,1}(t)+3P_{2,3}(t)$

אבל אנו כבר יודעים ש $P_{2,1}(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-6t}$

בנוסף, מכיוון שעבור כל זמן t מתקיים: $P_{2,1}(t)+P_{2,2}(t)+P_{2,3}(t)=1$

אז $P_{2,3}(t)=1-P_{2,2}(t)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-6t}\right)=\frac{2}{3}-P_{2,2}(t)+\frac{1}{3}e^{-6t}$

לכן נקבל משוואה דיפרנציאלית:

$$P'_{2,2}(t)=-5P_{2,2}(t)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-6t}\right)+3\left(\frac{2}{3}-P_{2,2}(t)+\frac{1}{3}e^{-6t}\right)$$

או $P'_{2,2}(t)=-8P_{2,2}(t)+\frac{1}{3}e^{-6t}+\frac{8}{3}$

<u>הערה</u>

זו משוואה לינארית מסדר ראשון. ראינו בסיכום הקודם שלמשוואות מסוג זה יש שיטת פתרון כללית. אבל אנחנו ננחש מסגרת פתרון כללית ונמצא את הפתרון המתאים במסגרת זו.

למשוואה זו נבחר פתרון: $P_{2,2}(t)=c_1e^{-6t}+c_2e^{-8t}+c_3$

צריך להתקיים: $-6c_1=-8c_1+\frac{1}{3}$

לכן נקבל ש $c_1=\frac{1}{6}$.

לכן הפתרון הוא מצורת $P_{2,2}(t)=\frac{1}{6}e^{-6t}+c_2e^{-8t}+c_3$

מכיון ש $P_{2,2}(0)=1$ אז $\frac{1}{6}+c_2+c_3=1$

מכיון שההסתברות הסטציונרית של מצב 2 היא $\frac{1}{3}$ (שווה ל $\frac{1-\pi_1}{2}$ משיקולי סימטריה)

לכן $c_3=\frac{1}{3}$. לכן מהמשוואה הקודמת נקבל $c_2=\frac{1}{2}$

והפתרון הוא $P_{2,2}(t)=\frac{1}{6}e^{-6t}+\frac{1}{2}e^{-8t}+\frac{1}{3}$

בדוגמא קודמת (דומה לשאלה משיעורי בית) ראינו שההתפלגות הגבולית לאורך זמן לא בהכרח שווה להתפלגות בזמן הקפיצות.

נתן <u>דוגמא</u> נוספת

נתונה שרשרת עם יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ונשאל באילו מצבים ההסתברות הגבולית גבוהה מההסתברות הגבולית בזמן הקפיצות ובאילו מקרים היא נמוכה יותר או שווה לה.

במקרה זה ניתן לענות לשאלה גם ללא ביצוע חישובים. במצבים השני והשלישי נתעכב בממוצע $\frac{1}{2}$ יחידת זמן עד קפיצה. במצב הראשון נתעכב בממוצע $\frac{1}{3}$ יחידת זמן עד קפיצה. לכן כל קפיצה מהמצבים השני והשלישי לוקחת בממוצע יותר מאשר קפיצה ממוצעת וכל קפיצה מהמצב הראשון לוקחת פחות מאשר קפיצה ממוצעת. השתמשנו כאן בעובדה שהממוצע הוא שקלול של שני ערכים בלבד.
לכן ההסתברות הגבולית של המצב הראשון היא נמוכה מההסתברות הגבולית שלו בזמני הקפיצות ואילו ההסתברות הגבולית של המצבים האחרים היא גבוהה מההסתברות הגבולית שלהם בזמן הקפיצות.

<u>שאלה</u>
נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף של תהליך פואסון.
האם ההסתברות הגבולית של המצבים השונים היא קטנה, שווה או גדולה מההסתברות הגבולית שלהם בזמן הקפיצות.

<u>תשובה</u>
בתהליך פואסון כל המצבים הם חולפים. לכן לגבי כל מצב, יש זמן סופי (סופי משתנה) שהחל ממנו לא נבקר בו יותר. לכן שני הגבולות שווים לאפס.

<u>סוגיה</u>
נתון תהליך מרקוב בזמן רציף על קבוצת המצבים $i = 0,1,2,\cdots$. נניח שמתקיים:

עבור $i \neq 0$: $P(X_{t+h} = i \mid X_t = 0) = \lambda_i h + o(h)$

ו $P(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 0) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i h\right) + o(h)$

עבור $i \neq 0$: $P(X_{t+h} = i-1 \mid X_t = i) = \mu_i h + o(h)$

ו $P(X_{t+h} = i \mid X_t = i) = 1 - \mu_i h + o(h)$

ועבור זוגות (i,k) אחרים: $P(X_{t+h} = i \mid X_t = k) = o(h)$

נניח שמתקיים $\lambda_i = \frac{\lambda^i}{i(i+1)}$ ו $\mu_i = \mu^i$ עבור כל $i \geq 1$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו אם קיימים זוגות (λ, μ) שעבורם השרשרת היא מהסוג המתואר. אם לא קיימים אז נמקו זאת ואם כן קיימים אז מצאו (λ, μ) מתאימים והראו שהם עונים לדרישה. בסעיפים השונים, זמני הקפיצות הם זמני המעבר ממצב למצב.

<u>א</u>. השרשרת היא חולפת.
<u>ב</u>. לשרשרת אין התפלגות גבולית ואין לה גם התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
<u>ג</u>. לשרשרת יש התפלגות גבולית אך אין לה התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
<u>ד</u>. לשרשרת יש התפלגות גבולית ויש גם התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
<u>ה</u>. לשרשרת אין התפלגות גבולית אך יש התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.

<u>פתרון לסוגיה</u>

<u>א</u>. לא יתכן
מכל מצב i , $i>0$ בהכרח עוברים למצב $i-1$ לאחר זמן סופי. לכן מכל מצב i מגיעים באיזשהו שלב למצב 0. לכן מצב 0 הו מצב נשנה. השרשרת היא בלתי פריקה. לכן בגלל שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים הם נשנים.
<u>ב</u>. יתכן
נניח ש $\lambda=1$ ו $\mu=1$. ממצב 0 מגיעים לאחד המצבים האחרים. יש כאן תחרות בין משתנים מעריכיים.

ממצב 0 מגיעים למצב i בהסתברות $\frac{\frac{1}{i(i+1)}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}}=\frac{1}{i(i+1)}$. מספר הצעדים לחזרה למצב 0 דרך מצב i הוא $i+1$. לכן תוחלת מספר הצעדים לחזרה ממצב 0 למצב 0 היא $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}(i+1)=\sum\frac{1}{i}=\infty$.

לכן אין התפלגות גבולית בזמני הקפיצות.
בכל מצב שוהים זמן בעל תוחלת 1 עד עזיבתו.
לכן גם תוחלת הזמן עד חזרה ל 0 היא ∞ . לכן מצב 0 אינו נשנה חיובי וכך גם כל המצבים האחרים אינם נשנים חיובית.
<u>ג</u>. יתכן
נבחר את אותו $\lambda=1$ שהיה בסעיף ב'. לכן יש את אותה התפלגות של מספר הקפיצות עד חזרה ל 0. לכן אין התפלגות גבולית בזמן הקפיצות. נקבע שתוחלת זמן השהות במצב i עד מעבר למצב $i-1$ תהיה 0.5^i . לכן מכל מצב תהיה תוחלת זמן החזרה למצב 0 קטנה מ $\sum_{i=1}^{\infty}0.5^i=1$. לכן יש תוחלת זמן סופית לחזרה ממצב 0 למצב 0 ומצב 0 הוא נשנה חיובי.
<u>ד</u>. יתכן
נבחר את אותו μ שהיה בסעיף ג'. כך בכל מקרה תהיה תוחלת זמן סופית עד חזרה למצב 0. נבחר את λ להיות 0.5 . כל ההסתברות שממצב 0 נגיע ישירות למצב i תהיה: $\frac{0.5^i\frac{1}{i(i+1)}}{\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k\frac{1}{k(k+1)}}$

(שוב תחרות בין זרמים פואסונים). המכנה שווה לאיזשהו קבוע M (טור שנשלט על-ידי טור גיאומטרי). המונה קטן מ 0.5^i, לכן המנה קטנה מ $\frac{0.5^i}{M}$. שוב מהלך ממצב 0 למצב i וחזרה לוקח $i+1$ צעדים ומתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{0.5^i}{M}(i+1)<\infty$. לכן תוחלת מספר הצעדים עד חזרה ל 0 היא סופית.
ממצב 0 ניתן להגיע ישירות למצבים 2 ו 3. לכן השרשרת הבלתי פריקה היא לא מחזורית ויש התפלגות גבולית בזמן הקפיצות.
<u>ה</u>. יתכן
נבחר את אותו λ שבחרנו בסעיף הקודם. כך תהיה תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 סופית.
כעת נקבע שתוחלת הזמן עד מעבר ממצב i למצב $i-1$ תהיה 3^i. שוב ההסתברות להגיע ממצב 0 ישירות למצב i תהיה $\frac{0.5^i\frac{1}{i(i+1)}}{M}$ כאשר M הוא קבוע. כדי לחזור ממצב i למצב 0 צריך לעבור i שלבים שרק לראשון שבינהם יש תוחלת 3^i. לכן תוחלת זמן החזרה למצב 0 גדולה מ

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{0.5^i\,\frac{1}{i(i+1)}}{M}\cdot 3^i = \infty$. לכן תוחלת זמן החזרה ממצב 0 לעצמו היא ∞ ולשרשרת אין התפלגות גבולית.

<u>תנאי האיזון המפורט</u>

במטריצה סופית מסדר נמוך קל לחשב את הוקטור הסטציונרי. זה יכול להיות קשה יותר בשרשרת אינסופית. נוכל להעזר לפעמים בתנאי האיזון המפורט. כאשר מאזן הכניסות והיציאות בין כל שני מצבים נשמר אז בודאי נשמר גם מאזן הכניסות והיציאות הכללי מכל מצב.

<u>דוגמא</u>

נניח שיש לנו את מערכת התור של שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. עבור כל i שלם ניתן לעבור ממצבים בעלי אינדקס לא גבוהה מ i למצבים בעלי אינדקס גבוה מ i רק ישירות ממצב i עצמו למצב $i+1$. בכיוון ההפוך בין שתי הקבוצות האלה של מצבים המעבר אפשרי רק ממצב $i+1$ למצב i. לכל מצב יש מעברים רק ממצבים בעלי אינדקס שכן. מכיון שלאורך זמן שכיחות המעברים בין כל שתי הקבוצות של בעלי אינדקס גבוה מ i או אינדקס לא גבוה מ i היא שווה אז מתקים תנאי האיזון המפורט ומתקים עבור כל $i \ge 1$: $\pi_i\mu = \pi_{i-1}\lambda$. לכן אם קיים וקטור הסתברויות סטציונרי אז נוכל לקבל עבור כל $i \ge 0$: $\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0$. אם הטור $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ מתכנס (זה קורה כאשר $\lambda < \mu$) אז נוכל לקבל הסתברויות סטציונריות $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$ ועבור j כללי $\pi_j = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$.

נשים לב שעבור $\lambda \ge \mu$ לא קיים וקטור סטציונרי.

האינטואיציה:

עבור $\lambda > \mu$, זרם המגיעים הוא בעל עוצמה גדולה יותר מאפשרות השירות לכן המצבים הם חולפים.

על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים תהיה החל מנקודה מסוימת כמות המגיעים גדולה תמיד מכמות אלה ששורתו.

עבור $\mu > \lambda$ קבלנו שיש וקטור סטציונרי. זה אומר בפרט שהמצבים הם נשנים. במקרה זה עבור כל מצב $i > 0$ שבו נמצאים אנו נשרת לקוחות כל עוד התחנה לא התרוקנה. מכיון שזרם המגיעים הוא קטן מזרם המסיימים שרות, אז יגיע הרגע שהתחנה תתרוקן. כאן יש סחיפה שמאלה. אך בקצה השמאלי יש את מצב 0 שממנו אי אפשר ללכת שמאלה.

ומה קורה כאשר $\lambda = \mu$?

כאשר נמצאים במצב $i > 0$ אז ההסתברות של קפיצה להיות שמאלה היא $\frac{\mu}{\lambda+\mu} \overset{here}{=} 0.5$.

הסיכוי שאי פעם נחזור למצב 0 שווה לסיכוי של הילוך מקרי סימטרי לחזר למצב 0. ראינו כבר בשיעורים קודמים שהילוך מקרי כזה הוא נשנה. לכן בודאות נחזור למצב 0. אך ראינו גם שבהילוך מקרי סימטרי, תוחלת מספר הצעדים עד חזרה לראשית היא אינסוף. כאן זמן הציפיה לכל צעד מתפלג כמינימום בין שני משתנים מעריכיים. זמן זה הוא בעל תוחלת קבועה. לכן תוחלת הזמן עד חזרה לראשית מכל מצב אחר שווה לאינסוף.

כאשר $\lambda < \mu$ אז התהליך בזמן הקפיצות הוא תהליך שמצביו הם חולפים. הוא דומה להילוך מקרי לא סימטרי. לכן במקרה זה גם התהליך לאורך זמן הוא תהליך שמצביו הם חולפים. לכך נתנו גם הסבר לפי החוק החזק.

<u>דוגמא</u>
נתונה שרשרת מרקוב עם מצבים $\{1,2,3\}$, בעלת יוצר

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

מצאו את תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למצב 3.

<u>פתרון</u>
במצב 1 שוהים זמן בעל תוחלת של $\frac{1}{3}$ יחידות זמן ואחר-כך בסיכוי $\frac{2}{3}$ עוברים למצב 2 ובסיכוי $\frac{1}{3}$ עוברים למצב 3. בצורה דומה, במצב 2 שוהים זמן בעל תוחלת של $\frac{1}{4}$ יחידות ואחר-כך בסיכוי $\frac{1}{4}$ עוברים למצב 1 ובסיכוי $\frac{3}{4}$ עוברים למצב 3. יהיו e_i - תוחלות זמן ההגעה ממצב i למצב 3.
מתקיים:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{2+1}e_2 + \frac{1}{2+1}\cdot 0 \\ e_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{1+3}e_1 + \frac{3}{1+3}\cdot 0 \end{cases}$$

<u>תוחלת זמן החזרה למצב 0</u>
נתונה מערכת תור של שרת אחד ואינסוף מקומות המתנה. נניח שזרם הצרכנים הוא פואסוני בעצמה 1 ומשך השרות מתפלג $\exp(1)$. נניח שברגע נתון יש צרכן אחד במערכת. מהי תוחלת הזמן עד שהתחנה לראשונה תתרוקן מצרכנים ?

<u>פתרון</u>
ממתינים עד לשינוי המצב (מעבר למצב 0 או למצב 2) זמן בעל תוחלת $\frac{1}{2}$ (תחרות בין שני משתנים מעריכיים בעלי פרמטר 1 כל אחד). אחר-כך אם מגיעים למצב 2 אז תוחלת זמן ההגעה משם למצב 0 היא $e_{2,0} = e_{2,1} + e_{1,0} = 2e_{1,0}$.
לכן נקבל משוואה $e_{1,0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 2e_{1,0}$ או $e_{1,0} = \frac{1}{2} + e_{1,0}$.
למשוואה זו אין פתרון סופי. זה לא מפתיע כי ראינו שבמערכת תור מטפוס זה כאשר $\lambda \ge \mu$ אין וקטור סטציונרי.

<u>שאלה</u>
מה היה קורה אילו היינו משנים את פרמטר ההגעה ל λ ואת פרמטר העזיבה ל μ .

<u>פתרון</u>

היינו מחכים זמן ממוצע של $\frac{1}{\lambda+\mu}$ עד לשינוי המצב ומעבר לאחד המצבים 0 או 2. בסיכוי $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ היינו מגיעים כבר למצב 0 ובסיכוי $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ היינו מגיעים למצב 2. לכן מתקיים:

$$E_{1,0}=\frac{1}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot 0+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot E_{2,0}$$

מכיון ש $E_{2,0}=2E_{1,0}$ (בשרשרת הספציפית הזאת), אז נקבל $E_{1,0}=\frac{1}{\mu-\lambda}$. מכאן תוחלת הזמן היא סופית אם"ם $\lambda<\mu$.

<u>הערה</u>
בגלל תכונת חוסר הזכרון של ההתפלגות המעריכית, זאת גם תוחלת זמן התעסוקה שמוגדרת כתקופה מהרגע הראשון שבו עוזבים את מצב 0 עד רגע החזרה הראשון אליו אחר-כך.

<u>דרך נוספת</u> לחישוב תוחלת זו
יהי a - התוחלת המבוקשת.
זו היא למעשה תוחלת הזמן עד הכחדות של השושלת שמורכבת מכל הצאצאים של הלקוח הנמצא בתחנה ושל כל צאצאיו לדורותיהם, כאשר כל דור מורכב מפרטים שמגיעים בזמן שהדור הקודם משורת.
הפרט הראשון ישורת בזמן בעל תוחלת $\frac{1}{\mu}$. בזמן זה יגיעו בממוצע $\frac{\lambda}{\mu}$ פרטים. עד להתרוקנות התור, צריך שכל השושלות האלה יכחדו. נקבל משוואה:

$$a=\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}a$$

נקבל את אותו פתרון שקבלנו קודם: $a=\frac{1}{\mu-\lambda}$.