מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ שיעור 12

שלומי

תהליכי לידה ומוות

תהליך לידה ומוות הוא שרשרת מרקוב בזמן רציף בעל מרחב מצבים שהם השלמים האי שליליים שמקיים גם את התכונה שמכל מצב ניתן לעבור רק למצבים בעל אינדקס שכן.

עבור $i \geq 1$: $\Lambda_{i,i+1} = \lambda_i$, $\Lambda_{i,i-1} = \mu_i$, $\Lambda_{0,1} = \lambda_0$

וכמובן שאברי האלכסון משלימים כל שורה לסכום אפס.

דוגמא לתהליך לידה ומוות

הדוגמא הראשונה היא תהליך פואסון שבו יש רק לידות: $\Lambda_{i,i+1} = \lambda$ לכל $i \geq 0$ כאשר λ הוא קבוע.

הגדרה

תהליך לידה טהור הוא תהליך שבו יש רק לידות.

דוגמא לתהליך לידה ומוות

תהליך בו כל פרט מביא צאצא נוסף בפרק זמן באורך h בהסתברות $\lambda h + o(h)$ ונכחד בפרק זמן באורך h בהסתברות $\mu h + o(h)$. כאן איברים ביוצר האינפיניטסימלי הם:

$$\Lambda_{i,i-1} = i\mu \quad , \quad \Lambda_{i,i+1} = i\lambda$$

שאלה

נתון תהליך לידה טהור בו $\Lambda_{i,i+1} = i\lambda$ לכל i . נניח ש $X(0) = 1$. מצאו את תוחלת גודל האוכלוסיה בזמן t קבוע.

פתרון ראשון

נחלק את האינטרוול $(0,t)$ ל n חלקים שווים. ההסתברות שבקטע זמן מסוים באורך $\frac{t}{n}$ יהיה יותר מאירוע אחד היא $o\left(\frac{t}{n}\right)$. כאשר $n \to \infty$ ההסתברות שבאיזשהו קטע זמן באורך $\frac{t}{n}$ יהיה יותר מאירוע אחד שואפת לאפס. לאחר זמן $\frac{t}{n}$ תהיה תוחלת גודל האוכלוסיה

$$1\left(1 - \frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)\right) + 2\left(\frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)\right) = 1 + \frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)$$

כל פרט מתרבה ונכחד בכל זמן באותו קצב לכן, לאחר n יחידות זמן תהיה תוחלת גודל האוכלוסיה שווה ל $\left(1 + \frac{t}{n}\lambda + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. כאשר $n \to \infty$ גודל זה שואף ל $e^{\lambda t}$.

פתרון בדרך נוספת

יהי $y(t)$ תוחלת גודל האוכלוסיה בזמן t . מתקיים $y'(t) = \lambda y(t)$ ובנוסף מתקיים תנאי התחלה $y(0) = 1$ (הנחנו גזירות ש פונקצית התוחלת למרות שלא הוכחנו אותה). עם תנאי ההתחלה יש למשוואה הזאת פתרון יחיד $y = e^{\lambda t}$.

דוגמא נוספת

עכשיו נניח שיש קצב לידה קבוע של $i\lambda$ וקצב מוות $i\mu$. מה תהיה כעת תוחלת גודל האוכלוסיה

בזמן t ?

<u>פתרון ראשון</u>

שוב נחלק את קטע הזמן עד t ל n קטעים שווים. תוחלת גודל האוכלוסיה לאחר זמן $\frac{t}{n}$ תהיה שווה ל

$$0\left(\mu\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)+1\left(1-(\lambda+\mu)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)+2\left(\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)=1+(\lambda-\mu)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)$$

שוב קצב הגדילה או הקטינה של האוכלוסיה נשאר קבוע ולכן לאחר n יחידות זמן תהיה תוחלת גודל האוכלוסיה שווה ל $\left(1+(\lambda-\mu)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. כאשר $n\to\infty$ גודל זה שואף ל $e^{(\lambda-\mu)t}$.

<u>פתרון בדרך נוספת</u>

יהי $y(t)$ - תוחלת מספר הפרטים בזמן t. מתקיים $y'(t)=\lambda y(t)-\mu y(t)$. למשוואה זו יש פתרון $y(t)=ce^{(\lambda-\mu)t}$. כאשר יש תנאי התחלה $y(0)=1$ אז הפתרון הוא $y(t)=e^{(\lambda-\mu)t}$.

<u>שאלה</u> שבפתרון שלה נעשה שימוש בהמשך

יש אוכלוסיה של n פרטים שכל אחד מהם חי זמן $\exp(\lambda)$ באופן בלתי תלוי באחרים ובכל מקרה לא מביא צאצאים (זהו תהליך מוות טהור והשתמשנו כאן ב λ לסימון קצב המוות. הסיבה לסימון זה תובהר בהמשך).

מהי ההסתברות שכל הפרטים יכחדו עד זמן t ?

<u>פתרון</u>

פרט מסוים ימות עד זמן t בהסתברות $1-e^{-\lambda t}$. לכן כל הפרטים ימותו עד זמן t בהסתברות $\left(1-e^{-\lambda t}\right)^n$.

<u>טענה</u>

ההסתברות שבתהליך המוות האחרון שתואר, כל הפרטים יכחדו עד זמן t , היא ההסתברות שסכום משתנים מעריכיים בלתי תלויים שוני פרמטר בעלי פרמטרים $k\lambda$, $1\le k\le n$, יקבל ערך קטן מ t .

<u>נימוק</u>

כאשר יש בשלב מסוים k פרטים, אז יש עד המעבר למצב $k-1$, תחרות בין k משתנים מעריכיים.
כאשר עוברים שלב, אז קטן מספר הפרטים שמתחרים על המוות הראשון.

<u>טענה</u>

גם ההסתברות שבתהליך לידה טהור בעל קצבים $\lambda_{i,i+1}=i\lambda$ שבו מתחילים עם פרט אחד, יהיו עד זמן t לפחות $n+1$ פרטים היא ההסתברות שסכום של אותם משתנים מעריכיים שוני פרמטר יהיה קטן מ t .

<u>הסבר</u>

שוב מדובר בשלבים שונים שבכל אחד מהם, זמני הצפיה עד הגעה לשלבים הבאים מתפלגים התפלגויות מעריכיות עם פרמטרים מתאימים.

<u>שאלה</u>

נתון תהליך לידה טהור עם קצבים $\lambda_{i,i+1}=i\lambda$ ונניח שמתחילים עם פרט בודד.

מהי ההתפלגות של מספר הפרטים בזמן t ?

<u>פתרון</u>

הסתברות זאת שווה להסתברות שיהיו לפחות k פרטים, אך לא לפחות $k+1$ פרטים.

מהפתרון לשאלה הקודמת ומהטענות שבאו אחר-כך, נקבל שההסתברות שיהיו לפחות k פרטים שווה להסתברות שבתהליך מוות טהור בעל קצבי מוות $i\lambda$ שבו מתחילים עם $k-1$ פרטים, כולם יכחדו וההסתברות שיהיו לפחות $k+1$ פרטים שווה להסתברות שבתהליך מוות טהור בעל קצבי מוות $i\lambda$ שבו מתחילים עם k פרטים, כולם יכחדו. לכן נקבל שההסתברות שיהיו k פרטים היא

$$\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k-1}-\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k}=e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k-1}$$

קבלנו שהתפלגות מספר הפרטים בזמן t היא $G\left(e^{-\lambda t}\right)$. מכאן התוחלת היא $e^{\lambda t}$ כפי שקבלנו גם קודם.

בשרשרת בלתי פריקה יש וקטור סטציונרי יחיד לכל היותר. יש וקטור סטציונרי רק במחלקה של מצבים נשנים חיובית. במחלקה של מצבים נשנים חיובית, יש וקטור סטציונרי גם אם המצבים מחזוריים. מחזוריות רק גורמת לכך שאין הסתברויות גבוליות למצבים נשנים חיובית.
למצבים נשנים חיובית ולא מחזוריים, יש להם הסתברויות גבוליות.
לגבי מצבים חולפים ונשנים אפס, יש להם הסתברות גבולית של אפס בין אם הם מחזוריים או לא מחזוריים.

<u>שאלה</u>
יואב ורמי מקיימים סדרת משחקים. בכל משחק יש מנצח אחד. התוצאות של המשחקים השונים הן בלתי תלויות. בכל משחק סיכויו של יואב לזכות הם 0.6 וסיכויו של רמי לזכות הם 0.4. הראשון מבינהם שזוכה בשני משחקים רצופים זוכה בסדרה.

<u>א</u>. בנו מודל לחישוב סיכויו של יואב לזכות בסדרה. בניית מודל כוללת הצגה של מטריצת מרקוב ומערכת משוואות לחישוב הסיכויים. אין צורך לחשב את הסיכויים ואין צורך לפתור את מערכת המשוואות.

<u>ב</u>. מהי ההסתברות שאף פעם לא תושג הכרעה בסדרת המשחקים ?
יש לבסס את התשובה על מיון מצבים ולא על פתרון משוואות.

<u>פתרון</u>
נגדיר שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים $\{1,2,3,4,5\}$
מצב 1 יהיה מצב התחלתי
מצב 2 יהיה מצב שעדיין לא נפלה הכרעה ויואב ניצח במשחק האחרון שהתקיים עד כה.
מצב 3 יהיה מצב שעדיין לא נפלה הכרעה ורמי ניצח במשחק האחרון שהתקיים עד כה.
מצב 4 יהיה מצב שכבר נפלה הכרעה בסדרה לטובת יואב.
מצב 5 יהיה מצב שכבר נפלה הכרעה בסדרה לטובת רמי.

מטריצת המעבר היא:

0	0.6	0.4	0	0
0	0	0.4	0.6	0
0	0.6	0	0	0.4
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

עבור כל $1 \le i \le 5$ נסמן ב a_i את סיכויו של יואב לזכות כאשר נמצאים במצב i.
סיכויו לנצח בסדרה הם a_1.
מתקיים:

$$a_4=1 \quad , \quad a_5=0$$
$$a_1=0.6a_2+0.4a_3$$

$$a_2 = 0.4a_3 + 0.6a_4$$
$$a_3 = 0.6a_2 + 0.4a_5$$

המצבים $\{1,2,3\}$ הם המצבים היחידים בהם עדיין לא נפלה הכרעה כאשר נמצאים בהם.
מכיון שהם מספר סופי של מצבים חולפים אז נבקר בכל אחד משלושת מצבים אלה רק מספר סופי של פעמים. לכן בהסתברות 1 נגיע למצבים האחרים והכרעה תפול.

כעת נשאל מהי תוחלת מספר הצעדים עד שנופלת הכרעה.
נגדיר שלושה נעלמים e_1, e_2, e_3 שהן תוחלות מספר הצעדים עד שנגיע להכרעה כאשר מתחילים במצבים 1,2,3 . מתקיים:

$$\begin{cases} e_1 = 1 + 0.6e_2 + 0.4e_3 \\ e_2 = 1 + 0.6 \cdot 0 + 0.4e_3 \\ e_3 = 1 + 0.6e_2 + 0.4 \cdot 0 \end{cases}$$

נשים לב שתוחלות מספרי הצעדים עד הגעה למצבים נשנים הן סופיות.
בכל אחד ממספר סופי של מצבים חולפים מבלים מספר צעדים שהוא בעל תוחלת סופית.

אבל, לא ניתן לדבר על תוחלת זמן הגעה למצב נשנה מסוים. במקרה זה, עבור כל מצב נשנה, יש הסתברות שכלל לא נגיע אליו. לכן, אין אפילו משתנה מקרי שמקבל רק ערכים סופיים שמודד את זמן ההגעה למצב נשנה מסוים.

<u>שאלה</u>
תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על כל השלמים, בו בכל שלב הולכים יחידה אחת ימינה בסיכוי 0.9 והולכים יחידה אחת שמאלה בסיכוי 0.1 . נניח שמתקיים $X_0 = 0$.
נגדיר סדרת משתנים $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שלכל n , $Y_n = |X_n|$.
עבור a ממשי קבוע, נגדיר סדרות משתנים $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שלכל n , $Z_n = |X_n - a|$ ו $W_n = \max\{Y_n, Z_n\}$.
כך למשל, אם $a = 1$ אז אם $X_n = -7$ אז $Y_n = |-7| = 7$, $Z_n = |-7-1| = 8$, $W_n = \max\{7,8\} = 8$ עבור אילו ערכים מבין הערכים $a = 0.4$, $a = 2$, $a = 1$, W_n היא שרשרת מרקוב הומוגנית ?
עבור כל ערך שהוא לא שרשרת מרקוב הומוגנית, יש לציין אם הוא אינו מרקובי או רק לא הומוגני בזמן.

<u>פתרון</u>
עבור $a = 0.4$ זאת היא שרשרת מרקוב הומוגנית.
במקרה זה W_n אומר לנו בדיוק היכן על הישר אנו נמצאים. אם W_n לא שלם אז אנו יודעים בדיוק באיזו נקודה שלילית אנו נמצאים ואם W_n שלם אז אנו יודעים בדיוק באיזו נקודה חיובית על הישר אנו נמצאים. ידיעת הערך המדויק של X_n נותנת את כל האינפורמציה הנחוצה לצעד הבא.
<u>הערה</u>: כך לגבי כל a לא שלם, W_n היא שרשרת מרקוב הומוגנית.

עבור $a = 2$ אין מרקוביות.
אם למשל $(W_1 = 3, W_2 = 2)$ אז ברור ש $(X_1 = -1)$ וש $(X_2 = 0)$ ואם למשל $(W_1 = 1, W_2 = 2)$ אז אנו או ב $(X_2 = 0)$ או ב $(X_2 = 2)$. משתי הנקודות האלה ההסתברויות לקבלת ערכי W_3 שונים הן שונות. לכן W_1 מוסיף אינפורמציה רלוונטית ולא כל המידע הרלוונטי נמצא בערכו של W_2.

עבור $a=1$ אין הומגניות בזמן.
אם W_n נתון ו n נתון אז נוכל לדעת בדיוק היכן אנו נמצאים. למשל אם W_n זוגי ו n זוגי, אז נוכל לדעת שאנו במקום שבו $X_n>0$ ונוכל גם לדעת בדיוק מהו ערכו של X_n. אבל אנו צריכים לדעת אם n זוגי או אי זוגי. אם למשל $n=2$ ו $W_n=1$ זה אומר שאנו בראשית, אבל אם למשל $n=1$ ו $W_n=1$ זה אומר שאנו בנקודה 1. מכיון שההילוך אינו סימטרי, אז בכל אחד מהמקרים ההתפלגות של W_2 היא שונה.

<u>שאלה</u> (מבחינה מ 15.08.08)
ישנן שתי השערות. ידוע שרק אחת מהן נכונה.
לליאת יש מחברת עבה בת 1001 דפים הממוספרים מ 0 עד 1000. ביום מספר 0 , ליאת רושמת בדף מספר 0 את אחת ההשערות, כאשר לכל השערה יש סיכוי שווה להירשם. אחר-כך בכל יום i , $1\le i\le 1000$, ליאת רושמת בדף i את אחת ההשערות , תוך שהיא מתחשבת רק בהשערתה מהיום הקודם. ידוע שאם השערתה ביום $i-1$ היתה נכונה, אז השערתה ביום i נכונה בסיכוי $\frac{3}{4}$, ואם השערתה ביום $i-1$ לא היתה נכונה, אז השערתה ביום i נכונה בסיכוי $\frac{1}{2}$. לאחר היום האחרון ליאת מראה לכל אחד מחבריה חלק מדפי המחברת. כל אחד מהחברים עושה כמיטב יכולתו כדי לקבוע איזו השערה נכונה.

<u>א</u>. דנה רואה רק את דף מספר 1. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכולה דנה לבחור בהשערה הנכונה ?
<u>ב</u>. פולינה רואה רק את דף מספר 1000. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכולה פולינה לבחור בהשערה הנכונה ?
<u>ג</u>. אדם רואה את כל דפי המחברת. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכול אדם לבחור בהשערה הנכונה ?
<u>ד</u>. אופיר רואה את 501 הדפים בעלי מספר זוגי. באיזו הסתברות, בדיוק או בקירוב, יכול אופיר לבחור בהשערה הנכונה ?

<u>תשובה</u>
<u>א</u>. בשלב 0 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{1}{2}$. בשלב 1 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$.
דנה תבחר בהשערה שהיא תראה וסיכויה הם $\frac{5}{8}$.

<u>ב</u>. סדרת ההשערות של ליאת היא שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר
$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

זאת היא מטריצה בלתי פריקה ובלתי מחזורית (ניתן לשהות במצב שני צעדים רצופים).
ההסתברות שבשלב ה- 1000 תהיה השערה נכונה, שווה בקירוב להסתברות הסטציונרית של המצב הראשון. ההסתברות הסטציונרית הזאת היא $\frac{2}{3}$. אם פולינה תבחר בהשערה שהיא תראה, אז סיכויה הם בקירוב $\frac{2}{3}$.

ג. במטריצה בלתי פריקה נשנית חיובית, יש התייצבות של השכיחויות של מצבים סביב ההסתברויות הסטציונריות שלהם. לכן ההסתברות שיהיה רוב להשערה הנכונה לאחר פרק זמן ארוך היא בקירוב 1. לכן אם אדם יבחר בהשערה שתופיע יותר אז סיכויו הם בקירוב 1.

ד. השרשרת היא לא מחזורית, לכן גם במקומות הזוגיים יש התייצבות סביב ההסתברות הסטציונרית. לכן גם אופיר יוכל לבחור בהשערה הנכונה בהסתברות שהיא בקירוב 1.

<u>שאלה</u> (מבחינה מ 17.07.09)
בכל אחד מהסעיפים הבאים רשומים תנאים על מצבים בשרשרת מרקוב.
בכל אחד מהסעיפים עליכם לקבוע ולנמק אם קיימת שרשרת שמצביה עונים על התנאים, כך שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$ עבור זוג מצבים שונים נתונים i, j , ואם קיימת שרשרת שמצביה עונים על התנאים, כך שלא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$ עבור זוג מצבים שונים נתונים i, j.
כאשר יש שרשרת מתאימה, אז יש לתת דוגמא מפורשת לשרשרת כזאת.
שימו לב שהסתברויות גבוליות יכולות להיות שוות לאפס או למספר חיובי.
שימו לב שבחלק מהסעיפים יתכנו שתי האפשרויות.

א. i, j מצבים בשרשרת סופית.

ב. לא קיימים אף אחד מהגבולות $\lim_{n\to\infty} P_{i,k}^{(n)}$ עבור כל מצב $k \neq j$.

ג. j מצב נשנה חיובי בעל מחזור 3 וניתן להגיע ממצב i למצב j .

ד. i, j שני מצבים נשנים חיובית בעלי מחזור שונה.

ה. i, j זוג מצבים נשנים ומחזוריים בשרשרת בלתי פריקה בעלת אינסוף מצבים.

<u>תשובה</u>
נראה שקיימות 9 אפשרויות מתוך $2\cdot 5 = 10$ אפשרויות (רק בסעיף ד' אפשרות אחת לא תתכן).

א. שרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

בכל שלב, ההסתברות להיות במצב 1 היא 0.5 ולכן ההסתברות הגבולית היא גם 0.5 ולא צריך אפילו להסתמך על שום טענה.
לעומת זאת בשרשרת בעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

יש שני גבולות חלקיים של 0 ו 1 ולכן לא קיים הגבול.

ב. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא קיים אף גבול עבור כל זוג מצבים i, j.
בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם j הוא המצב השלישי, אז מכיון שלא ניתן כלל להגיע למצב השלישי ממצבים אחרים אז קיים

הגבול אפס עבור כל מצב i אחר. לעומת זאת, עבור כל זוג מצבים אחר אין גבול.

ג. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא קיים הגבול.
בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר i הוא המצב הראשון ו j הוא למשל המצב השני, קיים הגבול ששווה ל $\frac{1}{3}$.

ד. בשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר למשל i הוא המצב הראשון ו j הוא המצב האחרון, אז מכיון שכלל לא ניתן להגיע מ i ל j אז הגבול הוא אפס.

מחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית. לכן שני מצבים ארגודיים שהם בעלי מחזוריות שונה, אינם מקושרים. לכן בהכרח קיים הגבול אפס.

ה. נסתכל על שרשרת שמצביה הם השלמים האי שליליים. מכל מצב $i > 0$ עוברים בהסתברות 1 למצב 0. ממצב 0 עוברים למצב i בהסתברות 0.5^i עבור כל $i > 0$. כך כשמתחילים במצב 1 אז מבקרים במצב 0 בכל צעד אי זוגי ואין אפשרות לבקר בו בצעדים הזוגיים. כשמתחילים במצב 0 אז בודאות חוזרים אליו לאחר שני צעדים. לכן מצב 0 הוא נשנה. מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית אז כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

נסתכל על שרשרת שמצביה הם השלמים האי שליליים ושבה מתקיים עבור כל $i \geq 1$: $P_{i,i-1} = 1$, מתקיים עבור כל $i \geq 0$: $P_{0,2i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$ ואין מעברים ישירים ממצב 0 למצבים בעלי אינדקס זוגי. מכל מצב חייבים לחזור למצב 0. לכן מצב 0 הוא מצב נשנה. ממצב 0 יש מסלולים לכל המצבים. מכיון שנשנות היא תכונה מחלקתית, אז כל המצבים הם נשנים. המחזור של מצב 0 הוא 2 ומכיון שמחזוריות מסוימת היא תכונה מחלקתית אז המחזור של כל המצבים הוא 2.
אם עוברים ממצב 0 למצב $2i+1$ אז לוקח $1 + 2i + 1 = 2i + 2$ צעדים עד חזרה למצב 0.
תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב 0 היא $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}(2i+2) = \infty$. לכן מצב 0 אינו נשנה חיובי. לכן כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה אינם נשנים חיובית ולכן קיים הגבול ששווה לאפס.
דוגמא נוספת היא ההילוך המקרי הסימטרי על הישר. גם כאן כל המצבים הם בעלי מחזור 2 ונשנים אפס.
